

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CAJAMARCA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE INGENIERÍA HIDRÁULICA



**“Análisis temporal de las intensidades máximas de lluvia en el valle de Cajamarca
mediante un tratado estadístico y matemático de datos aleatorios”**

**TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO HIDRÁULICO**

TESIS

Presentado por el bachiller

Jhonath Wensenber, Mejía Gonzales.

Asesor

Dr. Ing. José Francisco, Huamán Vidaurre.

Cajamarca - Perú

-2018-

CONSTANCIA DE INFORME DE ORIGINALIDAD

- FACULTAD DE INGENIERÍA -

- Investigador:** JHONATH WENSENBER MEJÍA GONZALES
DNI: 43138037
Escuela Profesional: INGENIERÍA HIDRÁULICA
- Asesor:** Dr. Ing. JOSÉ FRANCISCO HUAMÁN VIDAURRE.
Facultad: INGENIERÍA.
- Grado académico o título profesional**
 Bachiller Título profesional Segunda especialidad
 Maestro Doctor
- Tipo de Investigación:**
 Tesis Trabajo de investigación Trabajo de suficiencia profesional
 Trabajo académico
- Título de Trabajo de Investigación:** ANÁLISIS TEMPORAL DE LAS INTENSIDADES MÁXIMAS DE LLUVIA EN EL VALLE DE CAJAMARCA MEDIANTE UN TRATADO ESTADÍSTICO Y MATEMÁTICO DE DATOS ALEATORIOS-AÑO 2016.
- Fecha de evaluación:** 07 de setiembre de 2024
- Software antiplagio:** TURNITIN URKUND (OURIGINAL) (*)
- Porcentaje de Informe de Similitud:** 15 %
- Código Documento:** oid:3117:379180093.
- Resultado de la Evaluación de Similitud:**
 APROBADO PARA LEVANTAMIENTO DE OBSERVACIONES O DESAPROBADO

Fecha Emisión: 09 de septiembre del 2024

		<p>Firmado digitalmente por: FERNANDEZ LEON Yvonne Katherine FAU 20148258801 soft Motivo: Soy el autor del documento Fecha: 09/09/2024 22:18:24-0500</p>
<p>FIRMA DEL ASESOR</p>	<p>UNIDAD DE INVESTIGACIÓN FI</p>	
<p>Nombres y Apellidos: JOSÉ FRANCISCO HUAMÁN VIDAURRE</p>		
<p>DNI: 26609077</p>		



ACTA DE SUSTENTACIÓN PÚBLICA DE TESIS.

TITULO : "ANÁLISIS TEMPORAL DE LAS INTENSIDADES MÁXIMAS DE LLUVIA EN EL VALLE DE CAJAMARCA MEDIANTE UN TRATADO ESTADÍSTICO Y MATEMÁTICO DE DATOS ALEATORIOS - AÑO 2016."

ASESOR : Dr. Ing. José Francisco Huamán Vidaurre.

En la ciudad de Cajamarca, dando cumplimiento a lo dispuesto por el Oficio Múltiple N° 146-2019-PUB-SA-FI-UNC, de fecha 24 de mayo del 2019, de la Secretaría Académica de la Facultad de Ingeniería, a los veinticuatro días del mes de mayo del año en curso, siendo las diez horas con treinta minutos (10:30 a.m.), en la Sala de Audiovisuales de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cajamarca, se reunieron los Señores Miembros del Jurado Evaluador:

Presidente : Dr. Ing. Gaspar Virilo Méndez Cruz.
Vocal : Dr. Lic. Víctor Sánchez Cáceres.
Secretario : Dr. Ing. Luis Vásquez Ramírez.

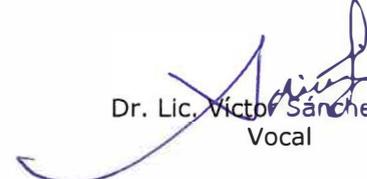
Para proceder a escuchar y evaluar la Sustentación Pública de tesis titulada: "ANÁLISIS TEMPORAL DE LAS INTENSIDADES MÁXIMAS DE LLUVIA EN EL VALLE DE CAJAMARCA MEDIANTE UN TRATADO ESTADÍSTICO Y MATEMÁTICO DE DATOS ALEATORIOS - AÑO 2016", presentado por el Bachiller en Ingeniería Hidráulica JHONATH WENSENBER MEJÍA GONZALES, asesorado por el Dr. Ing. José Francisco Huamán Vidaurre, para la obtención del Título Profesional.

Los Señores Miembros del Jurado replicaron al sustentante debatieron entre sí, en forma libre y reservada y lo evaluaron de la siguiente manera:

EVALUACIÓN PRIVADA: 07 PTS.
EVALUACIÓN PÚBLICA: 11 PTS.
EVALUACIÓN FINAL : 18 PTS decucho (en letras)

En consecuencia se lo declara apto con el calificativo de decucho acto seguido, el presidente del jurado hizo saber el resultado de la sustentación, levantándose la presente a las 11:45 horas del mismo día, con lo cual se dio por terminado el acto, para constancia se firmó por quintuplicado.


Dr. Ing. Gaspar Virilo Méndez Cruz
Vocal


Dr. Lic. Víctor Sánchez Cáceres.
Vocal


Dr. Ing. Luis Vásquez Ramírez.
Secretario


Dr. en I. José Francisco Huamán Vidaurre
Asesor



Firmado digitalmente por:
FERNANDEZ LEON Yvonne
Katherine FAU 20148258801 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 09/09/2024 22:16:24-0500

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN FI



EVALUACIÓN DE LA SUSTENTACIÓN PÚBLICA DE TESIS

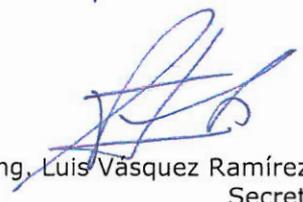
Bachiller en Ingeniería Hidráulica: JHONATH WENSENBER MEJÍA GONZALES.

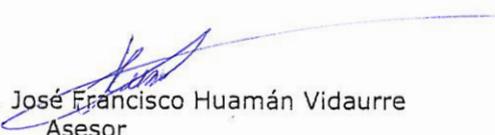
RUBRO	PUNTAJE
	Máximo/Calificación
2. DE LA SUSTENTACIÓN PÚBLICA	
2.1. Capacidad de síntesis	3.0
2.2. Dominio del tema	3.0
2.3. Consistencia de las alternativas presentadas	3.0
2.4. Precisión y seguridad en las respuestas	2.0
PUNTAJE TOTAL (MÁXIMO 12 PUNTOS)	11

Cajamarca, 24 de mayo del 2019.


Dr. Ing. Gaspar Virilo Méndez Cruz
Vocal


Dr. Lic. Víctor Sánchez Cáceres.
Vocal


Dr. Ing. Luis Vásquez Ramírez.
Secretario


Dr. en I. José Francisco Huamán Vidaurre
Asesor



Firmado digitalmente por:
FERNANDEZ LEON Yvonne
Katherine FAU 20148258001 soft
Motivo: Soy el autor del
documento
Fecha: 09/09/2024 22:16:24-0500

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN FI



EVALUACIÓN FINAL DE LA SUSTENTACIÓN DE TESIS

Bachiller en Ingeniería Hidráulica: JHONATH WENSENBER MEJÍA GONZALES.

RUBRO	PUNTAJE
A.- EVALUACIÓN DE LA SUSTENTACIÓN PRIVADA	07
B.- EVALUACIÓN DE LA SUSTENTACIÓN PÚBLICA	11
EVALUACIÓN FINAL	
EN NÚMEROS (A + B)	18
EN LETRAS (A + B)	dieciocho
- Excelente 20 - 19	
- Muy Bueno 18 - 17	
- Bueno 16 - 14	
- Regular 13 a 11	
- Desaprobado 10 a menos	

Cajamarca, 24 de mayo del 2019.


Dr. Ing. Gaspar Virilo Méndez Cruz
Vocal


Dr. Lic. Víctor Sánchez Cáceres.
Vocal


Dr. Ing. Luis Vásquez Ramírez.
Secretario


Dr. en I. José Francisco Huamán Vidaurre
Asesor



Firmado digitalmente por:
FERNANDEZ LEON Yvonne
Katherine FAU 20148258801 soft
Motivo: Soy el autor del
documento
Fecha: 09/09/2024 22:16:24-0500

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN FI



Universidad Nacional de Cajamarca

"Norte de la Universidad Peruana"

Fundada por Ley 14015 del 13 de Febrero de 1962

FACULTAD DE INGENIERÍA

Teléf. N° 365976 Anexo N° 1129-1130



ACTA DE SUSTENTACIÓN PRIVADA DE TESIS

TITULO: "ANÁLISIS TEMPORAL DE LAS INTENSIDADES MÁXIMAS DE LLUVIA EN EL VALLE DE CAJAMARCA MEDIANTE UN TRATADO ESTADÍSTICO Y MATEMÁTICO DE DATOS ALEATORIOS - AÑO 2016."

ASESOR: Dr. Ing. José Francisco Huamán Vidaurre.

En la ciudad de Cajamarca, dando cumplimiento a lo dispuesto por el Oficio Múltiple N° 252-2018-PRIV-SA-FI-UNC, de fecha 30 de julio del 2018, de la Secretaría Académica de la Facultad de Ingeniería, a los treinta días del mes de julio del 2018, siendo las diecisiete horas (5:00 p.m.), en los Ambientes de las Oficinas del CEPARTHA de la Facultad de Ingeniería, se reunieron los Señores Miembros del Jurado Evaluador:

Presidente : Ph.D. Ing. Santos Oswaldo Ortiz Vera.
Vocal : Dr. Ing. Gaspar Virilo Méndez Cruz.
Secretario : Dr. Ing. Luis Andrés León Chávez.

Para proceder a escuchar y evaluar la Sustentación Privada de tesis titulada: "ANÁLISIS TEMPORAL DE LAS INTENSIDADES MAXIMAS DE LLUVIA EN EL VALLE DE CAJAMARCA MEDIANTE UN TRATADO ESTADÍSTICO Y MATEMÁTICO DE DATOS ALEATORIOS - AÑO 2016", presentado por el Bachiller en Ingeniería Hidráulica JHONATH WENSENBER MEJÍA GONZALES, asesorado por el Docente: Dr. Ing. José Francisco Huamán Vidaurre y como Colaborador el Ing. Julio Ernesto Urbiola Del Carpio.

Los Señores Miembros del Jurado Evaluador replicaron al sustentante debatieron entre sí en forma libre y reservada y lo declararon.....A.P.T.O...... para la Sustentación Pública, acto seguido el Presidente del Jurado Evaluador, hizo saber el resultado de la sustentación, levantándose la presente a las18:00..... horas del mismo día, con lo cual se dio por terminado el acto, para constancia se firmó las respectivas actas por quintuplicado.


Ph.D. Ing. Santos Oswaldo Ortiz Vera.
Presidente


Dr. Ing. Gaspar Virilo Méndez Cruz
Vocal


Dr. Ing. Luis Andrés León Chávez.
Secretario


Dr. en I. José Francisco Huamán Vidaurre
Asesor

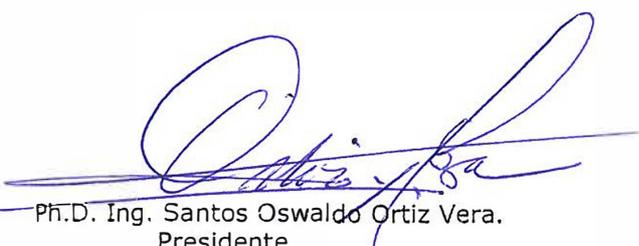


EVALUACIÓN DE LA SUSTENTACIÓN PRIVADA DE TESIS.

Bachiller en Ingeniería Hidráulica: JHONATH WENSENBER MEJÍA GONZALES.

RUBRO	PUNTAJE
1. DE LA TESIS	
1.1. PRESENTACIÓN	<u>1.5</u>
1.2. REDACCIÓN Y ORTOGRAFÍA	<u>1.5</u>
1.3. NIVEL PROFESIONAL (O CIENTÍFICO TÉCNICO).	<u>1.5</u>
2. DE LAS PREGUNTAS	
a. DOMINIO DEL TEMA.	<u>1.5</u>
b. PRECISIÓN Y SEGURIDAD DE LAS RESPUESTAS	<u>1.0</u>
TOTAL GENERAL (Máximo 08 Puntos)	<u>7.0</u>

Cajamarca, 30 de julio del 2018.


Ph.D. Ing. Santos Oswaldo Ortiz Vera.
Presidente


Dr.-Ing. Gaspar Virilo Méndez Cruz
Vocal


Dr. Ing. Luis Andrés León Chávez.
Secretario


Dr. en I. José Francisco Huamán Vidaurre
Asesor

AGRADECIMIENTO

En primera instancia, agradezco infinitamente desde el fondo de mí corazón al único Dios y Señor todo Poderoso, por haberme dado inteligencia y sabiduría en abundancia, para realizar este proyecto de tesis, el cual a su tiempo espero poderlo convertir en un libro. En segunda instancia, a mi esposa e hijas, padres, tíos, abuelos, quienes me brindaron el apoyo moral y afectuoso en los momentos difíciles por los que tuve que pasar. En tercera instancia, agradecer a todos mis amigos que intervinieron con algún tipo de aporte a mi proyecto de tesis.

DEDICATORIA

A mí Dios y Señor quien sé, que nunca me dejará

*“Como tú no sabes cuál es el camino del viento, o
cómo crecen los huesos en el vientre de la mujer encinta, así
ignoras la obra de Dios, el cual hace todas las cosas” ...Eclesiastés 11:5-6 (RV1960)*

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS	V
ÍNDICE DE CUADROS.....	VI
ÍNDICE DE GRÁFICOS	VI
ÍNDICE DE TABLAS	VII
RESUMEN	VIII
ABSTRACT	IX
CAPÍTULO I.....	1
1. INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO II	3
2. MARCO TEÓRICO.....	3
2.1 Antecedentes Teóricos de la Investigación	3
2.2 Bases Teóricas.....	3
Precipitación	3
Intensidad de Lluvia.....	5
Tratado Estadístico de las Intensidades Máximas de Lluvia	6
Estadística Descriptiva.....	6
Estadística Inferencial	11
Tratamiento Probabilístico	11
Probabilidad Total.....	12
Complementariedad.....	12
Probabilidad condicional.....	12
Hidrología Estadística.....	16
Funciones Generadoras de Distribuciones de Probabilidad	17
Función generadora de Probabilidad Pearson	19
Distribuciones de Probabilidad pertenecientes a la Familia de Curvas Pearson	20
Distribución Normal.....	20
Distribución Exponencial.....	27
Distribución Gamma	30
Distribución Pearson tipo III.....	35
Función Generadora de Probabilidad Polinómica	37
Función Generalizada de Valores Extremos.....	39
Distribuciones de Probabilidad pertenecientes a la función de Valores extremos generalizada.....	43
Distribución EVI o Gumbel	43
Distribución EVII o Frechet	45
Distribución EVIII o Weibull.....	46
Función Generalizada de Probabilidad Empírica de Excedencia.....	47
Estimación de Parámetros Estadísticos	49
Método de Momentos Pesados	49
Métodos de Momentos Lineales	55
Prueba de Bondad o de Ajuste.....	56
Tratado Matemático de las Intensidades Máximas de Lluvia	58
Ajuste de Curvas con funciones Lineales	58
Criterio para la regresión por mínimos cuadrados	58
Teorema de la primera derivada para extremos relativos.....	58

Formulación General de una matriz para mínimos cuadrados	60
Modelos lineales	60
Modelos no Lineales	61
Función Generalizada de las Curvas IDT	64
Ajuste de curvas con funciones sinusoidales	66
Aproximación de Fourier	66
Análisis Espectral	69
Funciones pares e impares	71
Series de Fourier	74
Integral de Fourier	75
Forma compleja de la integral de Fourier	78
Transformadas de Fourier	79
Espectro de Frecuencia	82
Espectro de Fase	83
Espectro de Potencia	84
Condiciones de muestreo para los Espectros	85
CAPÍTULO III	87
3. MATERIALES Y MÉTODOS	87
3.1. Zona de estudio	87
3.2. Metodología	87
3.3. Información Meteorológica	87
3.4. Análisis de consistencia	90
3.5. Cálculo del número de años de registro de una serie hidrológica	96
Métodos estadísticos	97
Ajuste de las series de intensidades máximas de lluvia a una distribución de probabilidad. ...	97
Funciones inversas de las distribuciones de probabilidad	116
Construcciones de curvas IDF a partir de las distribuciones de probabilidad	116
Generalización de las curvas IDT	117
Métodos Matemáticos	137
Análisis Espectral	137
CAPÍTULO IV	140
4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS	140
CAPÍTULO V	142
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	142
LISTA DE SÍMBOLOS	143
APÉNDICE A. PROGRAMAS	144
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	176

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Las pequeñas gotas de agua en las nubes se forman por nucleación de vapor sobre los aerosoles, para luego pasar por varios ciclos de condensación- evaporación a medida que circulan en la nube, hasta que alcanzan un tamaño suficientemente grande para caer a través de la base de la nube.	5
Figura 2. Los eventos A y B son subconjuntos del espacio muestral.	12
Figura 3. Funciones de frecuencia para la información de muestra y funciones de probabilidad para la población.	15
Figura 4. Función de densidad de probabilidad Normal.	22
Figura 5. Función de densidad de probabilidad Normal Estándar para diferentes valores de σ	23
Figura 6. Función de densidad de probabilidad acumulada Normal.	23
Figura 7. Función de densidad de probabilidad acumulada Normal Estándar.	24
Figura 8. Función de densidad de probabilidad Exponencial.	29
Figura 9. Función de densidad de probabilidad acumulada Exponencial.	29
Figura 10. Función de densidad de probabilidad Gamma para diferentes valores de α	32
Figura 11. Función Gamma.	33
Figura 12. Función de densidad de probabilidad acumulada Gamma.	34
Figura 13. Función de densidad de probabilidad valor extremo generalizado.	42
Figura 14. Primer momento alrededor del origen de la variable aleatoria, una medida del punto medio o "tendencia central" de la distribución.	50
Figura 15. Prueba de ajuste de Smirnov Kolmogorov.	58
Figura 16. Superficie generada por la variación de los coeficientes a_0 y a_1	59
Figura 17. Funciones trigonométricas.	67
Figura 18. Además de las funciones trigonométricas seno y coseno, las funciones periódicas comprenden formas de onda como a) la onda cuadrada y b) la onda dientes de sierra. Más allá de estas formas idealizadas, las señales periódicas en la naturaleza pueden ser c) no ideales y d) contaminadas por ruido. Las funciones trigonométricas sirven para representar y analizar todos estos casos.	67
Figura 19. a) Una gráfica de la función sinusoidal $y(t) = A_0 + C_1 \cos \omega_0 t + \theta$. En este caso, $A_0 = 1.7$, $C_1 = 1$, $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/1.5$ y $\theta = \pi/3 \text{ rad} = 1.0472$. Otros parámetros que se utilizan para describir la curva son la frecuencia $f = \omega_0/(2\pi)$, que en este caso es 1 ciclo / (1.5 s), y el periodo $T = 1.5$ s. b) Una expresión alternativa para la misma curva es $y(t) = A_0 + A_1 \cos \omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t$. Los tres componentes de esta función se ilustran en b), Donde $A_1 = 0.5$ y $B_1 = -0.866$. La suma de las tres curvas en b) da como resultado la curva simple en a).	68
Figura 20. Representaciones gráficas de a) un ángulo de fase de atraso y b) un ángulo de fase de adelanto. Observe que la curva atrasada en a) puede describirse de manera alternativa como $\cos \omega_0 t + 3\pi/2$. En otras palabras, si una curva se atrasa en un ángulo α , también se puede representar como adelanto en $2\pi - \alpha$	69
Figura 21. a) Una ilustración de cómo se representa una senoide en los dominios del tiempo y de la frecuencia. Se reproduce la proyección en el tiempo en b); mientras que la proyección de amplitud-frecuencia se reproduce en c). La proyección de fase-frecuencia se muestra en d). ...	70
Figura 22. Varias fases de una senoide que muestran el espectro de fase correspondiente. ...	71
Figura 23. Gráfica de funciones pares.	72
Figura 24. Gráfica de funciones impares.	73
Figura 25. Los puntos muestrales de la serie discreta de Fourier.	82
Figura 26. Efecto denominado aliasing.	85
Figura 27. Ocurrencia de posibles eventos máximos en una serie de datos.	125

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 1. Medidas de tendencia central, adaptado del libro estadística para investigadores de George E. Box.....	7
Cuadro 2. Medidas de dispersión, adaptado del libro estadística para investigadores de George E. Box.	8
Cuadro 3. Medida de asimetría, adaptado del libro estadística para investigadores de George E. Box.....	9
Cuadro 4. Medidas de achatamiento, adaptado del libro estadística para investigadores de George E. Box.	10
Cuadro 5. Distribuciones Límite para los máximos GEV. Adaptado de la Universidad de Alcalá de Henares.....	39
Cuadro 6. Función Generalizada de Probabilidad Empírica de Excedencia.....	48
Cuadro 7. Parámetros de las Distribuciones de Probabilidad.	54
Cuadro 8. Correspondencia matemática de $f(t)$ y $F(\omega)$	80

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Intensidades máximas de lluvia, período 1973-2012.....	89
Gráfico 2. Precipitaciones anuales de la estación Weberbauer, período 1973-2014.....	93
Gráfico 3. Precipitación anuales de la estación San Juan, período 1973-2015.....	94
Gráfico 4. Precipitaciones anuales de la estación San Juan y Weberbauer.....	94
Gráfico 5. Modelo de Regresión lineal, PpSJ vs PpW.....	95
Gráfico 6. Análisis visual gráfico.....	96
Gráfico 7. Test de Kolmogorov para una distribución Normal.....	109
Gráfico 8. Función de densidad de probabilidad Normal.	111
Gráfico 9. Test de Kolmogorov para una distribución Gumbel.	112
Gráfico 10. Función de densidad de probabilidad Gumbel.....	113
Gráfico 11. Test de Kolmogorov para una distribución GEV.....	114
Gráfico 12. Función de densidad de probabilidad GEV.	115
Gráfico 13. Curvas IDF, Distribución Normal.....	116
Gráfico 14. Curvas IDF, Distribución Gumbel.	117
Gráfico 15. Curvas IDF, Distribución GEV.....	117
Gráfico 16. $I_{max}=f(I_{maxNorm},d)$	119
Gráfico 17. $I_{max}=f(T,d)$	121
Gráfico 18. I_{max} estimada Vs I_{max} observada, Ec. Koutsoyiannis.	124
Gráfico 19. número de datos versus coeficiente de determinación R^2 , Ec. de Koutsoyiannis.	126
Gráfico 20. $I_{max}=f(T,d)$	127
Gráfico 21. I_{max} estimada Vs I_{max} observada, Ec. GEV.	130
Gráfico 22. Número de datos versus coeficiente de determinación R^2 , Ec. GEV.	131
Gráfico 23. $I_{max}=f(T,d)$	132
Gráfico 24. I_{max} estimada Vs I_{max} observada, Ec. Jhowen.	135
Gráfico 25. Número de datos versus coeficiente de determinación R^2 , Ec. de Jhowen.	136
Gráfico 26. Espectros de potencia 1D.	137
Gráfico 27. Espectros de potencia en 2D.	138

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Intensidades máximas de lluvia, período 1973-2015.	87
Tabla 2. parámetros estadísticos.....	89
Tabla 3. Matriz MX, Intensidades máximas de lluvia.	98
Tabla 4. Frecuencias empíricas.	99
Tabla 5. Período de Retorno en años.....	100
Tabla 6. Probabilidad de excedencia teórica para un d=5min.....	102
Tabla 7. Probabilidad de excedencia teórica para un d=10min.....	103
Tabla 8. Probabilidad de excedencia teórica para un d=30min.....	104
Tabla 9. Probabilidad de excedencia teórica para un d=60min.....	105
Tabla 10. Probabilidad de excedencia teórica para un d=120min.....	106
Tabla 11. Delta teórico.....	107
Tabla 12. Parámetros de la Ec. Normal.....	120
Tabla 13. Parámetros de la Ec. Koutsoyiannis.....	122
Tabla 14. Variación de los coeficientes de determinación según Ec. Koutsoyiannis	123
Tabla 15. Parámetros de la Ec. GEV.....	128
Tabla 16. Variación de los coeficientes de determinación según GEV.	129
Tabla 17. Parámetros de la Ec. Jhowen.....	133
Tabla 18. Variación de los coeficientes de determinación según Jhowen.	134

RESUMEN

En la práctica, se encuentran registros cortos de información hidrológica que dificultan el diseño de las Estructuras Hidráulicas, debido a las pocas y en algunos casos, inexistentes estaciones meteorológicas en la zona de estudio, encontrar el número mínimo de datos de un registro histórico, para que la muestra sea representativa de la población, resulta un problema importante. El criterio estadístico y matemático, para determinar el número mínimo de datos de un registro histórico, que se utilizó, fue el análisis probabilístico y análisis espectral de variables aleatorias, respectivamente. En el primer método, se utiliza la teoría de la estadística descriptiva e inferencial en el análisis de frecuencias y períodos de retorno para la generalización de ecuaciones de intensidad, duración y período de retorno (IDT), cuyos modelos reproducen a la variable en cuestión, en mayor o menor precisión. En el segundo método, se hace uso de la transformada de Fourier, para hacer una representación espectral de la variable en cuestión, en el dominio de la frecuencia, cuya gráfica representa los valores de las frecuencias con mayor incidencia (longitud de ciclo). Por lo tanto, se concluye que la recomendación del número mínimo de datos de un registro histórico al no contar con información meteorológica extensa, es de 25 años en promedio, este resultado se corroboró con recomendaciones de algunos autores y entidades.

Palabras claves

Espectro, Frecuencia, Período de retorno, Intensidad, Parámetro, Ecuación diferencial, Proceso estocástico.

ABSTRACT

In practice, there are short records of hydrological information that hinder the design of hydraulic structures, due to the few and in some cases, non-existent weather stations in the study area, finding the minimum number of data from a historical record, so that the sample is representative of the population, is a major problem. The statistical and mathematical criterion, to determine the minimum number of data of a historical record, that was used, was the probabilistic analysis and spectral analysis of random variables, respectively. In the first method, it uses the theory of descriptive and inferential statistics in the analysis of frequencies and return periods, for the generalization of equations of intensity, duration and return period (RTD), whose models reproduce the variable in question, in greater or lesser precision. In the second method, it makes use of the Fourier transform, to make a spectral representation of the variable in question, in the frequency domain, whose graph will represent the values of the frequencies with the highest incidence (cycle length). Therefore, it is concluded that the recommendation of the minimum number of data from a historical record without extensive meteorological information is 25 years on average, this result was corroborated with recommendations according to some authors and entities.

Key words

Spectrum, Frequency, Return period, Intensity, Parameter, Differential equation, Stochastic process.

CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los rasgos climáticos más importantes que caracteriza un lugar es su régimen pluviométrico, destacándose por su importancia en el ámbito meteorológico, hidrológico y de Ingeniería Hidráulica, las intensidades máximas de lluvia, su duración y la frecuencia con que se producen. Su conocimiento es imprescindible para la gestión y manejo de los recursos hídricos, la prevención de inundaciones y sequías, la planificación y operación de actividades agrícolas, la generación de energía hidroeléctrica, el abastecimiento de agua potable, los sistemas de drenaje urbano, entre otros.

En la práctica se encuentran registros cortos de información hidrológica que dificultan el diseño de las Estructuras Hidráulicas, debido a las pocas y en algunos casos, inexistentes estaciones meteorológicas en la zona de estudio. Dado que, no se cuenta con más estaciones meteorológicas en el valle de Cajamarca que tengan registros históricos de más de 30 años, sólo se trabajará con una, la estación Weberbauer, la cual nos brindará toda la información necesaria para realizar el análisis temporal de las intensidades máximas de lluvias en el valle de Cajamarca.

El objetivo del presente proyecto de investigación es estimar el número mínimo de datos de un registro histórico de información pluviográfica, para que la muestra sea representativa de la población y sirva en el diseño de estructuras hidráulicas, debido a que un buen análisis temporal de intensidades máximas de lluvia producirá una buena representación de la hidrología superficial y procesos de escorrentía.

El diseño y la planeación de obras hidráulicas como el sistema de drenaje de aguas pluviales están siempre relacionadas con eventos hidrológicos futuros; por ejemplo, la intensidad máxima de lluvia, para el diseño de una cuneta es un evento que tal vez no se ha presentado jamás, o al menos no en el periodo de datos disponible, pero que es necesario conocer para determinar las dimensiones de la obra. La complejidad de los procesos físicos que tienen lugar en la generación de esta variable hace, en la mayoría de los casos, imposible una estimación confiable de la misma por métodos basados en las leyes de la mecánica o la física, ya sea porque estos métodos son insuficientes, o sea porque el modelo matemático resultante sería exageradamente grande, complicado y difícil de manejar.

Los métodos estadísticos están basados en principios matemáticos que describen la variación aleatoria de un conjunto de observaciones de un proceso, y éstos centran su atención en las observaciones mismas, en lugar de los procesos físicos que las producen, la definición dada por Julius Hann ha minimizado en exceso el tratamiento analítico, al reducir el clima al “estado medio” de la atmósfera, se ha utilizado casi exclusivamente la media como parámetro estadístico significativo, con todos los inconvenientes de tal simplificación, un tratamiento sofisticado estadístico plantea numerosas cuestiones más que respuestas. En el siguiente proyecto de investigación se utilizará como método alternativo, la aplicación de la transformada de Fourier para realizar los análisis de frecuencias.

Según Luis Miguel Albentosa Sánchez en su libro Climatología y medio ambiente hace mención que, en una primera época, la climatología dinámica se basó en el estudio del régimen de valores normales de los caracteres del tiempo resultante de la elaboración de series largas como mínimo treinta años. El criterio estadístico y matemático, para determinar el número mínimo de datos de un registro histórico, que se utilizó, fue el análisis probabilístico y análisis espectral de variables aleatorias, respectivamente. En el primer método se utiliza la teoría de la estadística descriptiva e inferencial en el análisis de frecuencias y períodos de retorno, para la generalización de ecuaciones de intensidad, duración y período de retorno (IDT), cuyos modelos reproducen a la variable en cuestión, en mayor o menor precisión. En el segundo método se hace uso de la transformada de Fourier, para hacer una representación espectral de la variable en cuestión, en el dominio de la frecuencia, cuya gráfica dará el valor de las frecuencias con mayor incidencia (longitud de ciclo).

Debido a la gran densidad de cálculos hechos en el presente proyecto de investigación, se hace uso del software Matlab, programa de alto nivel matemático y usado ampliamente en trabajos de ingeniería e investigación.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes Teóricos de la Investigación

En el “Manual de Hidrología, Hidráulica y Drenaje” del Ministerio de Transportes y Comunicaciones, el número mínimo de datos recomendado de un registro histórico es de 25 años, para la predicción de eventos futuros, con el objetivo que los resultados sean confiables. En su libro, “Climatología y medio ambiente”, Luis Miguel Albentosa Sánchez, recomienda que 25 años, es el número mínimo de datos de un registro histórico. El Manual del Silvo Agropecuario (tomo X), recomienda un mínimo de 20 años de datos de un registro histórico, haciendo hincapié de nuestra realidad en cuanto a la escasez de datos, lo cual lamentablemente hasta la fecha no ha cambiado mucho, como se puede apreciar aún no se ha establecido un criterio matemático que determine el número mínimo de años de un registro histórico.

2.2 Bases Teóricas

Precipitación

La precipitación incluye la lluvia, la nieve y otros procesos mediante los cuales el agua cae a la superficie terrestre, tales como granizo y nevisca. La formación de precipitación requiere la elevación de una masa de agua en la atmósfera de tal manera que se enfríe y parte de su humedad se condense. Los tres mecanismos principales para la elevación de masas de aire son la elevación frontal, donde el aire caliente es elevado sobre aire frío por un pasaje frontal; la elevación orográfica, mediante la cual una masa de aire se eleva para pasar por encima de una cadena montañosa; y la elevación convectiva, donde el aire se arrastra hacia arriba por una acción convectiva, como ocurre en el centro de una celda de una tormenta eléctrica. Las celdas convectivas se originan por el calor superficial, el cual causa una inestabilidad vertical de aire húmedo, y se sostienen por el calor latente de vaporización liberado a medida que el vapor del agua sube y se condensa (CHOW. 1994). En la figura 1 se ilustra la formación de precipitación en las nubes. A medida que el aire sube y se enfría, el agua se condensa de un estado de vapor a un estado líquido. Si la temperatura se encuentra por debajo del punto de congelamiento, se forman cristales de hielo. La condensación requiere de una semilla llamada el núcleo de condensación alrededor del cual las moléculas del agua se pueden unir o nuclear. Algunas partículas de polvo que flotan en el aire pueden actuar como núcleos de condensación; las partículas que contienen iones son efectivas como núcleos debido a que los iones atraen por

electrostática las moléculas de agua enlazadas polarmente. Los iones en la atmósfera incluyen partículas de sal que se forman a partir de la evaporación de espuma marina, y compuestos de sulfuro y nitrógeno resultantes de procesos de combustión, Los diámetros de estas partículas varían desde $10e-3$ hasta $10\ \mu\text{m}$ y se conocen como aerosoles. Como comparación, el tamaño de un átomo es aproximadamente de $10e-4\ \mu\text{m}$, lo cual significa que los aerosoles más pequeños pueden componerse sólo de algunos cientos de átomos. Las pequeñas gotas de agua crecen mediante la condensación e impacto con las más cercanas a medida que se mueven por la turbulencia del aire, hasta que son lo suficientemente grandes para que la fuerza de gravedad sobrepase la fuerza de fricción y empiezan a caer, incrementando su tamaño cuando golpean otras gotas en su descenso. Sin embargo, a medida que la gota cae, el agua se evapora de su superficie y su tamaño disminuye, de tal manera que puede reducirse nuevamente al tamaño de un aerosol y desplazarse hacia arriba en la nube debido a la turbulencia. Una corriente ascendente de solamente $0.5\ \text{cm/s}$ es suficiente para arrastrar una pequeña gota de $10\ \mu\text{m}$. Algunos cristales de hielo del mismo peso, debido a su mayor forma y tamaño, pueden ser arrastrados por velocidades aún más pequeñas. El ciclo de condensación, caída, evaporación y elevación se repite en promedio unas diez veces antes de que la gota alcance un tamaño crítico de alrededor de $0.1\ \text{mm}$, que es suficientemente grande para que caiga a través de la base de la nube. Las gotas permanecen esféricas hasta un diámetro de alrededor de $1\ \text{mm}$, pero empiezan a aplanarse en el fondo cuando aumenta su tamaño, y dejan de ser estables en su caída al atravesar el aire dividiéndose en pequeñas gotas de lluvia. Las gotas de lluvia normales que caen a través de la base de una nube tienen de 0.1 a $3\ \text{mm}$ de diámetro (CHOW. 1994).

Algunas observaciones indican que en las nubes pueden existir gotas de agua a temperaturas por debajo del punto de congelamiento, hasta unos $-35\ \text{C}^\circ$. A esta temperatura, las gotas súper enfriadas se congelan aun sin la presencia de núcleos de congelamiento. La presión de vapor de saturación del vapor de agua es menor en hielo que en agua líquida; luego si las partículas de hielo se mezclan con gotas de agua, estas partículas crecerán por efecto de la evaporación de las gotas y la condensación de los cristales de hielo. Los cristales de hielo normalmente forman racimos mediante colisión y fusión y caen como copos de nieve. Sin embargo, algunos cristales de hielo pueden crecer tanto, que caen directamente a la tierra como granizo o nevisca (CHOW. 1994).



Figura 1. Las pequeñas gotas de agua en las nubes se forman por nucleación de vapor sobre los aerosoles, para luego pasar por varios ciclos de condensación- evaporación a medida que circulan en la nube, hasta que alcanzan un tamaño suficientemente grande para caer a través de la base de la nube.

Fuente: Hidrología Aplicada, Ven Te Chow (1994).

Formas de Precipitación

Llovizna: pequeñas gotas de agua, cuyo diámetro varía entre 0.1 mm a 0.5 mm, las cuales tienen velocidades de caída muy bajas.

Lluvia: gotas de agua con diámetro mayor a 0.5 ms.

Escarcha: capa de hielo por lo general transparente y suave, pero que usualmente tiene bolsas de aire.

Nieve: compuesta de cristales de hielo blanco translúcido, principalmente de forma compleja.

Granizo: precipitación en formas irregulares de hielo, que se producen por nubes convectivas, pueden ser esféricos, cónico o de forma irregular.

Intensidad de Lluvia

Es la lámina de la precipitación pluvial en una superficie por unidad de tiempo, la intensidad de lluvia se expresa generalmente en milímetros por hora (mm/h) y se obtiene de registros pluviográficos o bandas pluviográficas. A menor tiempo de duración de una tormenta o períodos parciales de la misma, mayor será la intensidad. Una ecuación que relaciona la lámina de lluvia, generada por una tormenta, con su duración es:

$$h = C d^n \quad [1]$$

Donde h es la lámina de lluvia registrada, en centímetros, d es la duración de la tormenta en horas, c es un coeficiente y n es un exponente positivo menor que uno; típicamente n varía entre 0.2 y 0.5 (PONCE. 1989).

Se sabe que la intensidad y duración de una tormenta están inversamente relacionadas, por lo que de la Ec. [1], se puede obtener la intensidad de la lluvia diferenciando la lámina de lluvia con respecto al tiempo

$$\frac{dh}{dt} = i = Cnd^{n-1} \quad [2]$$

Donde i es la intensidad de la tormenta, simplificando la Ec. [2] se obtiene:

$$i = \frac{\lambda}{d^\eta} \quad [3]$$

En este caso $\lambda = C(n)$ y $\eta = (1 - n)$. Se sabe que n es menor que 1, por lo que η también es menor que 1.

Esta es la ecuación básica de la intensidad de lluvia Ec. [3], para describir el comportamiento de la intensidad de lluvia en función de su duración, más adelante se verá ecuaciones más complejas para dicho fin, en donde también intervendrá como variable independiente el periodo de retorno (GEOS. 2004 Vol. 24, No. 1, p. 46-56).

Tratado Estadístico de las Intensidades Máximas de Lluvia

El objetivo de la estadística es extraer la información esencial de un conjunto de datos, reduciendo un conjunto grande de números a un conjunto pequeño de números, las estadísticas son números calculados de una muestra los cuales resumen sus características más importantes, para luego poder inferir conclusiones sobre una población a partir de dicha muestra. Estas dos partes de la estadística no son mutuamente excluyentes, ya que, para utilizar los métodos de la inferencia estadística, se requiere conocer los métodos de la estadística descriptiva (TRIOLA. 2004).

Estadística Descriptiva

Medidas Descriptivas de los datos

Para describir ciertas características de un conjunto de datos, se puede usar números simples, llamados estadísticos que son estimativos de los parámetros de la población, de ellos se puede obtener un conocimiento más preciso de los datos, que el que se obtiene a partir de las tablas y los gráficos. Las características más importantes de este conjunto de datos son:

Cuadro 1. Medidas de tendencia central, adaptado del libro estadística para investigadores de George E. Box.

Fuente: Estadística para investigadores, George E. Box (2008).

1. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas de tendencia central, denominados también promedios, ubican el centro de los datos, y son la media aritmética, la moda y la mediana.

1.1 MEDIA ARITMÉTICA

La media aritmética se usa con más frecuencia por su mejor tratamiento algebraico, pero no siempre es un buen promedio, tal es el caso de las series de datos que contienen valores extremos que afectan la posición del centro de los datos.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad [4]$$

1.2 MODA

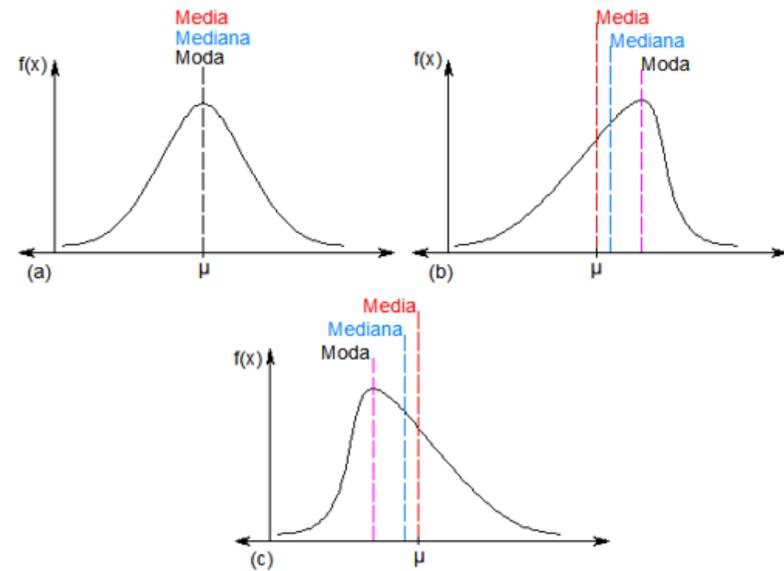
Es aquel Valor que se repiten más frecuentemente en un conjunto de datos, se denota por Mo.

1.3 MEDIANA

Es un Valor único de un conjunto de datos que mide al elemento central en los datos. Este único elemento de los datos ordenados, es el más cercano a la mitad, o el más central en el conjunto de los números. La mitad de los elementos quedan por encima de ese punto, y la otra mitad por debajo de él. Sea x_1, x_2, \dots, x_n , datos ordenados por magnitud creciente o decreciente y n el número impar de datos, la mediana es el dato situado en el centro.

Para n impar
 $Med = X(n + 1)/2 \quad [5]$

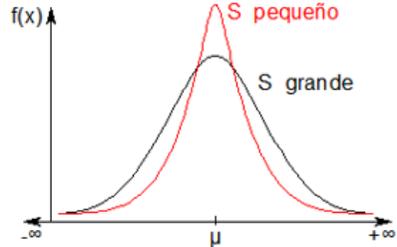
Para n par
 $Med = (X_{n/2} + X_{n/2 + 1})/2 \quad [6]$



Comparación entre la media, la mediana y la moda.

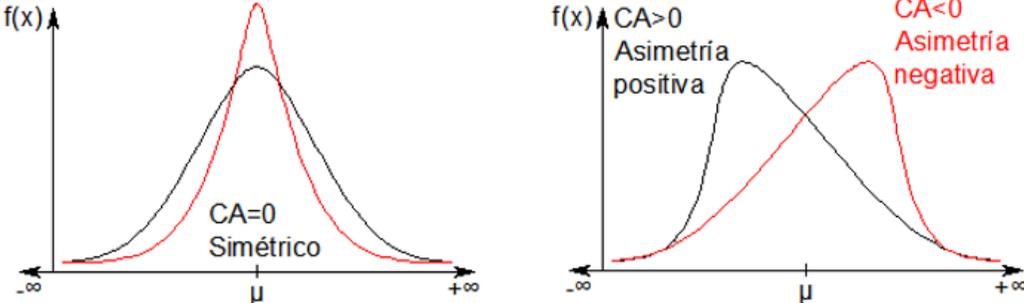
Cuadro 2. Medidas de dispersión, adaptado del libro estadística para investigadores de George E. Box.

Fuente: Estadística para investigadores, George E. Box (2008).

<p>2. MEDIDAS DE DISPERSIÓN</p> <p>Las medidas de tendencia central no son suficientes para describir un conjunto de valores de alguna variable estadística, los promedios determinan el centro, pero nada indican acerca de cómo están situados los datos respecto de dicho punto, se necesita una medida del grado de dispersión o variabilidad con respecto al centro con la finalidad de ampliar la descripción de los datos o de comparar dos series de datos. Si la dispersión es poca, indica gran uniformidad de los datos en la distribución, por el contrario, gran dispersión indica poca uniformidad.</p>		
<p>2.1 RANGO</p> <p>Es una medida de distancia que representa la diferencia entre el mayor y el menor de los valores observados, es decir:</p> $R = X_{max} - X_{min} \quad [7]$ <p>El Rango o la amplitud es una manera conveniente de describir la dispersión, mas no da medida alguna de la dispersión entre los datos con respecto al valor central.</p> <p>2.2 COEFICIENTE DE VARIACIÓN</p> <p>Es una medida relativa de dispersión que mide el grado de agrupamiento de las observaciones alrededor del punto central. Toma valores entre 0 y 1, relaciona la desviación estándar y la media, es decir:</p> $Cv = \frac{S}{\bar{x}} \quad [8]$	<p>2.3 LA VARIANZA MUESTRAL</p> <p>Para datos no agrupados, se obtiene dividiendo la suma de cuadrados de las observaciones de los datos con respecto a la media, entre el número total de datos menos uno, es decir:</p> $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad [9]$ <p>2.4 DESVIACIÓN ESTÁNDAR MUESTRAL.</p> <p>Se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza muestral, es decir:</p> $S = \sqrt{S^2} \quad [10]$	 <p>Efectos en la función de densidad de probabilidad causados por cambios en la desviación estándar.</p>

Cuadro 3. Medida de asimetría, adaptado del libro estadística para investigadores de George E. Box.

Fuente: Estadística para investigadores, George E. Box (2008).

3. MEDIDAS DE ASIMETRÍA	
<p>3.1 COEFICIENTE DE ASIMETRÍA El coeficiente de asimetría indica si la dispersión es idéntica o no, a ambos lados del punto central. Para datos no agrupados, el coeficiente de asimetría (Ca) poblacional, se obtiene con la siguiente ecuación:</p> $Ca = \frac{n^2(\mu_3)}{(n-1)(n-2)S^3} \quad [11]$ <p>Donde:</p> $\mu_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (xi - \bar{x})^3 \quad [12]$ $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (xi - \bar{x})^2} \quad [13]$ $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n xi \quad [14]$	 <p>Efectos en la función de densidad de probabilidad causados por cambios en el coeficiente de asimetría.</p>

Cuadro 4. Medidas de achatamiento, adaptado del libro estadística para investigadores de George E. Box.

Fuente: Estadística para investigadores, George E. Box (2008).

4. MEDIDAS DE ACHATAMIENTO

4.1. CURTOSIS

Una curtosis positiva indica que los datos muestran más valores atípico extremos que una distribución normal. Una curtosis negativa indica que los datos muestran menos valores atípicos extremos que una distribución normal. El coeficiente de Curtosis C_k para datos muestrales, se define mediante la siguiente ecuación.

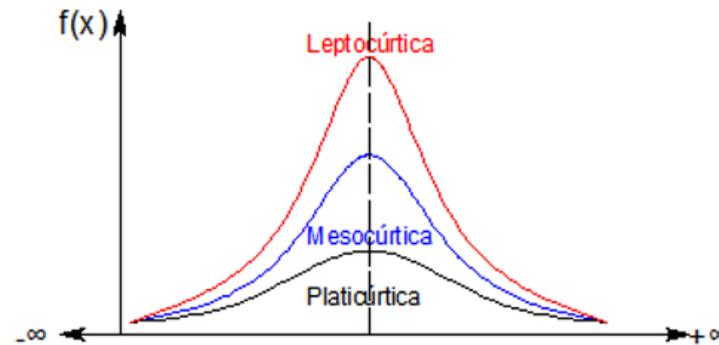
$$C_k = \frac{n^2(n+1)(\mu_4)}{(n-1)(n-2)(n-3)S^4} - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \quad [15]$$

Donde:

$$\mu_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 \quad [16]$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad [17]$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad [18]$$



Grado de achatamiento o kurtosis. Si $C_k=0$ la curva es mesocúrtica, $C_k<0$ es platicúrtica, $C_k>0$ es leptocúrtica.

Estadística Inferencial

Conjunto de métodos con los que se hace la generalización o la inferencia sobre una población utilizando una muestra, la inferencia puede contener conclusiones que puede no ser ciertas en forma absoluta, por lo que es necesario que éstas sean dadas con una medida de confiabilidad (TRIOLA. 2004).

Tratamiento Probabilístico

Una variable aleatoria X es una variable descrita por una distribución de probabilidad. La distribución determina la posibilidad de que una observación x de la variable caiga en un rango especificado de X . Por ejemplo, si X es la precipitación anual en un lugar especificado, entonces la distribución de probabilidad de X determina la posibilidad de que la precipitación anual observada en un año dado caiga en un rango definido, tal como menos de 762 mm, o 762-1016 mm, y así sucesivamente (CHOW. 1994).

Un conjunto de observaciones x_1, x_2, \dots, X_n de la variable aleatoria se denomina una muestra. Se supone que las muestras son sacadas de una hipotética población infinita que posee propiedades estadísticas constantes, mientras que las propiedades de una muestra pueden variar de una muestra a otra. El conjunto de todas las muestras posibles que pueden extraerse de una población se conoce como el espacio muestra, y un evento es un subconjunto del espacio muestra (véase la figura 2).

Por ejemplo, el espacio muestra para la precipitación anual es teóricamente el rango desde cero hasta infinito positivo (a pesar de que los límites prácticos inferior y superior son más cercanos que esto) y un evento A puede ser la ocurrencia de una precipitación anual menor que una cierta cantidad, tal como 762 mm.

La probabilidad de un evento, $P(A)$, es la posibilidad de que éste ocurra cuando se hace una observación de la variable aleatoria. Las probabilidades de eventos pueden estimarse, si una muestra de n observaciones tiene n_A valores en el rango de evento A , entonces la frecuencia relativa de A es n_A/n . A medida que el tamaño de la muestra aumenta, la frecuencia relativa se convierte progresivamente en una estimación mejor de la probabilidad del evento (CHOW. 1994), es decir.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad [19]$$

Tales probabilidades se conocen como probabilidades objetivas o posteriores debido a que dependen concretamente de las observaciones de la variable aleatoria. La gente está acostumbrada a estimar la posibilidad de que un evento futuro ocurrirá con base en su

juicio y experiencia. Tales estimaciones se conocen como probabilidades subjetivas o a priori. Las probabilidades de eventos obedecen ciertos principios:

Probabilidad Total.

Si el espacio muestral Ω está completamente dividido en m eventos o áreas no traslapadas A_1, A_2, \dots, A_m , entonces

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m) = P(\Omega) = 1 \quad [20]$$

Complementariedad.

Se sigue que, si \bar{A} es el complemento de A , es decir, $\bar{A} = \Omega - A$, entonces

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad [21]$$

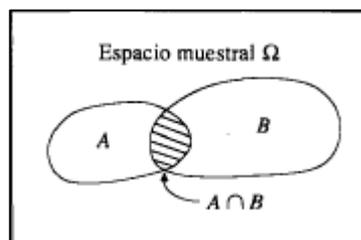


Figura 2. Los eventos A y B son subconjuntos del espacio muestral.

Fuente: Hidrología Aplicada, Ven Te Chow (1994).

Probabilidad condicional.

Supóngase que existen dos eventos A y B tal como se muestra en la figura 2. El evento A podría ser el que la precipitación de este año fuera menor que 1016 mm mientras que B podría ser el evento de que la precipitación del próximo año sea menor que 1016 mm. Su intersección es $A \cap B$, el evento de que tanto A como B ocurran, es decir, dos años sucesivos con precipitación anual menor de 1016 mm. Si $P(B/A)$ es la probabilidad condicional de que ocurra B dado que ya ha ocurrido A , entonces la probabilidad conjunta que A y B ocurran, $P(A \cap B)$, es el producto de $P(B/A)$ y la probabilidad de que A ocurra, es decir, $P(A \cap B) = P(B/A)P(A)$, o

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad [22]$$

Si la ocurrencia de B no depende de la ocurrencia de A se, dice que los eventos son independientes y $P(B/A) = P(B)$. Para eventos independientes

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad [23]$$

Si, para el ejemplo citado anteriormente, los eventos de precipitación son independientes de un año a otro, entonces la probabilidad de que la precipitación sea menor de 1016 mm

en dos años sucesivos es simplemente el cuadrado de la probabilidad de que la precipitación anual en un solo año sea menor que 1016 mm.

El concepto de eventos u observaciones independientes es crítico para la interpretación estadística correcta de secuencias de información hidrológica, porque si la información es independiente puede analizarse sin tener en cuenta su orden de ocurrencia. Si observaciones sucesivas están correlacionadas (no independientes), los métodos estadísticos requeridos son más complejos debido a que la probabilidad conjunta $P(A \cap B)$ de eventos sucesivos no es igual a $P(A)P(B)$ (CHOW. 1994).

Funciones de Frecuencia y de Probabilidad

Si las observaciones de una muestra están idénticamente distribuidas (cada valor de la muestra extraído de la misma distribución de probabilidad), éstas pueden ordenarse para formar un histograma de frecuencia. Primero, el rango factible de la variable aleatoria se divide en intervalos discretos, luego se cuenta el número de observaciones que cae en cada uno de los intervalos y finalmente el resultado se dibuja como una gráfica de barras. El ancho Δx del intervalo utilizado para construir el histograma de frecuencia se escoge tan pequeño como sea posible y de tal manera que caigan suficientes observaciones dentro de cada uno de los intervalos para que el histograma tenga una variación razonablemente suave en el rango de la información (CHOW. 1994).

Si el número de observaciones n_i en el intervalo i , que cubre el rango $[x_i - \Delta x \leq X \leq x_i]$, se divide por el número total de observaciones n , el resultado se conoce como la función de frecuencia relativa $f_s(x)$:

$$f_s(x_i) = \frac{n_i}{n} \quad [24]$$

Es una estimación de $P(x_i - \Delta x \leq X \leq x_i)$, la probabilidad de que la variable aleatoria X caiga en el intervalo $[x_i - \Delta x \leq X \leq x_i]$. El subíndice s indica que la función se calcula utilizando información de la muestra.

La suma de los valores de las frecuencias relativas hasta un punto dado es la función de frecuencia acumulada $F_s(x)$:

$$F_s(x_i) = \sum_{j=1}^i f_s(x_j) \quad [25]$$

Es un estimativo de $P(X \leq x_i)$, la probabilidad acumulada de x_i .

Las funciones de frecuencia relativa y de frecuencia acumulada están definidas para una muestra; las funciones correspondientes para la población se aproximan como límites a

medida que $n \rightarrow \infty$ y $\Delta x \rightarrow 0$. En el límite, la función de frecuencia relativa dividida por el intervalo de longitud Δx se convierte en la función de densidad de probabilidad $f(x)$:

$$f(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{fs(x)}{\Delta x} \quad [26]$$

La función de frecuencia acumulada se convierte en la función de distribución de probabilidad $F(x)$,

$$F(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} Fs(x) \quad [27]$$

Cuya derivada es la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad [28]$$

Para un valor dado de x , $F(x)$ es la probabilidad acumulada $P(X \leq x)$, y puede expresarse como la integral de la función de densidad de probabilidad sobre el $X \leq x$:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad [29]$$

Donde u es una variable de integración auxiliar.

Desde el punto de vista de ajuste de la información de la muestra a una distribución teórica, las cuatro funciones: frecuencia relativa $fs(x)$ y frecuencia acumulada $Fs(x)$ para la muestra, y distribución de probabilidad $F(x)$ y densidad de probabilidad $f(x)$ para la población, pueden ordenarse en un ciclo, tal como se muestra en la figura 3.

Empezando por la parte superior izquierda:

(a) La función de frecuencia relativa se calcula utilizando los datos de la muestra divididos en intervalos y acumulados para formar la función de frecuencia acumulada mostrada en la parte inferior izquierda, (b).

La función de distribución de probabilidad, en la parte inferior derecha (c), es el límite teórico de la función de frecuencia acumulada a medida que el tamaño de la muestra se vuelve infinitamente grande y el intervalo de la información infinitamente pequeño.

La función de densidad de probabilidad, en la parte superior derecha (d), es el valor de la pendiente de la función de distribución para un valor específico de x . El ciclo puede cerrarse calculando un valor teórico de la función de frecuencia relativa, denominado la función de probabilidad incrementada:

$$P(x_i) = P(x_i - \Delta x \leq X \leq x_i)$$

$$P(x_i) = \int_{x_i - \Delta x}^{x_i} f(x) dx$$

$$P(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_i - \Delta x} f(x)dx$$

$$P(x_i) = F(x_i) - F(x_i - \Delta x)$$

$$P(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) \quad [30]$$

La comparación entre $P(x_i)$ y la función de frecuencia relativa observada $f_s(x_i)$ para cada x_i puede utilizarse como una medida del grado de ajuste de la distribución a la información.

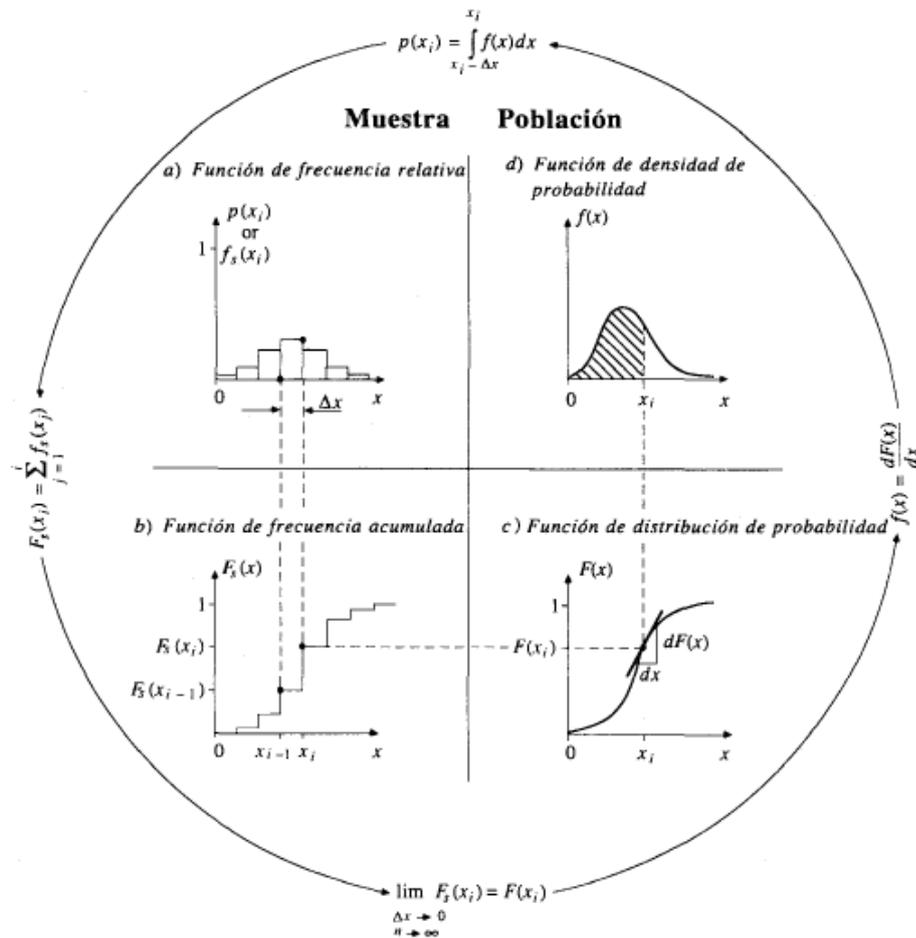


Figura 3. Funciones de frecuencia para la información de muestra y funciones de probabilidad para la población.

Fuente: Hidrología Aplicada, Ven Te Chow (1994).

Las funciones de frecuencia relativa, frecuencia acumulada y distribución de probabilidad son todas adimensionales y varían en el rango $[0,1]$ (CHOW. 1994). Sin embargo, como $dF(x)$ es adimensional y dx tiene dimensiones de X , la función de densidad de probabilidad $f(x) = dF(x)/dx$ tiene dimensiones de $[X]^{-1}$ y varía en el rango $[0, \infty]$. La

relación $dF(x) = f(x) dx$ puede describirse diciendo que $f(x)$ representa la "densidad" o "concentración" de probabilidad en el intervalo $[x, x + dx]$.

Hidrología Estadística

Los procesos hidrológicos evolucionan en el espacio y en el tiempo en una forma que es parcialmente predecible, o determinística, y parcialmente aleatoria. Un proceso de este tipo se conoce con el nombre de proceso estocástico. En algunos casos, la variabilidad aleatoria del proceso es tan grande comparada con su variabilidad determinística, que se justifica que el hidrólogo trate el proceso como puramente aleatorio. De esta manera, el valor de una observación del proceso no está correlacionada con los valores de observaciones adyacentes, y las propiedades estadísticas de todas las observaciones son iguales (CHOW. 1994).

Cuando no existe correlación entre observaciones adyacentes, la salida de un sistema hidrológico es tratada como estocástica, independiente del espacio e independiente del tiempo, este tipo de tratamiento es apropiado para observaciones de eventos hidrológicos extremos, como crecientes o sequías, y para información hidrológica promediada a lo largo de intervalos de tiempo grandes, como la precipitación anual. En el presente trabajo se describe información hidrológica de procesos enteramente aleatorios utilizando parámetros y funciones estadísticos (CHOW. 1994).

La estadística es una ciencia de descripción, no de causalidad, los métodos estadísticos están basados en principios matemáticos que describen la variación aleatoria de un conjunto de observaciones de un proceso, y éstos centran su atención en las observaciones mismas en lugar de los procesos físicos que las producen. Una serie de tiempo hidrológica típica es la descripción cuantitativa de la historia de caudales o la precipitación en un punto determinado. Existe una cantidad limitada de información contenida en cada serie de tiempo hidrológica; esta información tiene su descripción más completa en un récord continuo (en el tiempo) de observaciones. No obstante, el mismo registro puede describirse en términos de mecanismos (relaciones matemáticas) con diferentes grados de precisión. Es posible generar (por medio de funciones matemáticas) series de tiempo que difieren de la observada pero que conservan varias propiedades de la serie original. Cada secuencia generada se construye de tal manera que los eventos individuales tengan la misma probabilidad de ocurrencia que tienen en la secuencia (CHOW. 1994).

La hidrología estocástica tiene sentido solamente en un diseño, o en decisiones de tipo operacional. En un diseño hidrológico el ingeniero desea, con gran frecuencia, conocer

cómo trabaja una obra en particular bajo una serie representativa de eventos hidrológicos futuros. El diseñador no está en posición de conocer la precipitación o los caudales futuros, pero puede suponer que los eventos en el futuro tendrán las mismas propiedades estocásticas del registro histórico. Esta suposición es la base principal de la hidrología estocástica, es decir, la generación de secuencias de eventos equiprobables y en los que cada secuencia tiene propiedades estadísticas similares. Cada secuencia de eventos de entrada produce una secuencia de eventos de salida del sistema bajo investigación. Un análisis estocástico que utiliza muchas secuencias de entrada da la distribución de probabilidad de la respuesta del sistema, que puede ser usada posteriormente para diseño y para decisiones de tipo operacional (CHOW. 1994).

Las distribuciones de probabilidad, son una función que representa la probabilidad de ocurrencia de una variable aleatoria, el hidrólogo tendrá generalmente un registro meteorológico (precipitación, caudales, evapotranspiración, temperaturas) el cual, a través de su conocimiento del problema físico, escogerá un modelo probabilístico que represente satisfactoriamente el comportamiento aleatorio de la variable en cuestión (CHOW. 1994).

Funciones Generadoras de Distribuciones de Probabilidad

Una forma de abordar el estudio global y conjunto de un gran número de distribuciones de probabilidades, se consigue con la formulación de sistemas de distribuciones que verifican una determinada ecuación funcional, bien diferencial para las distribuciones de tipo continuo, o bien en diferencias finitas para las distribuciones de tipo discreto, los sistemas de distribuciones continuas univariantes más estudiados por sus aplicaciones son el sistema de Pearson (PEARSON. 1895), familia Polinómica y la familia exponencial Loéve. Son varios los objetivos que se consiguen con esta formulación, a saber:

- a) Aplicación sistemática de diversas metodologías en la generación de familias de distribuciones.
- b) La obtención sistemática de características comunes a cada familia: relaciones de recurrencias entre momentos, clasificación de distribuciones etc.

Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea generadora de una distribución continua univariante de probabilidad.

Una función $g(x)$ real de variable real, definida sobre el intervalo (a,b) , es una función generadora de una distribución continua de probabilidad sobre el intervalo (a,b) si solo sí:

$$\int_a^b e^{\int_a^x g(x)dx} dx < +\infty \quad [31]$$

Donde a puede llegar a ser $-\infty$ y b puede llegar a ser $+\infty$.

En efecto, si la condición requerida se verifica, se puede definir la función de densidad de una variable aleatoria X , mediante la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} Ke^{\int_a^x g(x)dx}, & \text{sí } a < x < b \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad [32]$$

Obsérvese que es una verdadera función de densidad pues $e^{\int_a^x g(x)dx}$ es definida positiva y además la integral definida $\int_a^b e^{\int_a^x g(x)dx} dx$ es finita y distinta de cero, lo que permite calcular la constante de integración K con la condición de normalización. La probabilidad así definida depende de la función real $g(x)$, del recinto sobre el que va a estar $f(x)$, y de las condiciones que se le impongan a la densidad resultante.

Por otra parte, sí $f(x)$ es la función de densidad de una variable aleatoria y (a, b) es su dominio de definición, se puede calcular la correspondiente función generadora, que viene dada por:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{df(x)}{f(x)dx} \quad [33]$$

Para los puntos donde $f'(x)$ existe y $f(x)$ no es cero. Entonces será:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= g(x) \\ \int \frac{df(x)}{f(x)} &= \int_a^x g(x)dx \\ \ln f(x) &= \int_a^x g(x)dx + C \\ f(x) &= e^{\int_a^x g(x)dx + C} = Ke^{\int_a^x g(x)dx} \end{aligned} \quad [34]$$

La función acumulada de $f(x)$ cumple:

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b Ke^{\int_a^x g(x)dx} = 1$$

$$\frac{1}{e^c} = \frac{1}{K} = \int_a^b e^{\int_a^x g(x)dx}$$

$$K^{-1} = \int_a^b e^{\int_a^x g(x)dx} < +\infty \quad [35]$$

Donde la expresión $\int_a^x g(x)dx$ representa, una cualquiera de las primitivas de $g(x)$, es decir la función real acumulada $G(x)$, y en particular la obtenida mediante el procedimiento de integración.

Con lo cual es posible encontrar para cada distribución continua univariante de probabilidad, la función $g(x)$, definida sobre los puntos donde $f(x)$ es estrictamente positiva y derivable (CALLEJÓN. 1994).

Función generadora de Probabilidad Pearson

El sistema de distribuciones de probabilidad Pearson incluye siete tipos; todos son soluciones para $f(x)$ en una ecuación de la forma (PEARSON. 1895).

$$\frac{df(x)}{f(x)dx} = g(x) = \frac{-(x-d)}{C_2x^2 + C_1x + C_0}$$

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{-(x-d)dx}{C_2x^2 + C_1x + C_0} = \int \frac{-(x-d)dx}{C_2x^2 + C_1x + C_0} + C$$

$$\ln f(x) = \int \frac{-(x-d)dx}{C_2x^2 + C_1x + C_0} dx + C$$

$$f(x) = e^{\int \frac{-(x-d)dx}{C_2x^2 + C_1x + C_0} + C} = K * e^{\int \frac{-(x-d)dx}{C_2x^2 + C_1x + C_0}}$$

$$f(x) = Ke^{G(x)} \quad [36]$$

Donde d , C_0 , C_1 y C_2 son coeficientes de la Función generadora de Probabilidad de Pearson. Cuando $C_2 = 0$, la solución de la ecuación [36] es una distribución Pearson tipo III. Para $C_2 = C_1 = 0$ la solución de dicha ecuación es una distribución normal. Por tanto, la distribución normal es un caso especial de la distribución Pearson tipo III para describir una variable no simétrica (CHOW. 1994).

Para una aplicación directa la estimación de los parámetros d , C_0 , C_1 y C_2 se realiza a través del método de los momentos pesados, sin más que resolver el sistema de ecuaciones, que se obtiene al hacer $k = 0,1,2,3$ en la siguiente expresión (ELDERTON W.P, JOHNSON N.L. 1969).

$$M_o^k d - kM_o^{(k-1)}C_0 - (k+1)M_o^k C_1 - (k+2)M_o^{(k+1)}C_2 = M_o^{(k+1)} \quad [37]$$

Donde:

M_o^k : Momento con respecto al origen, de orden k

d, C_o, C_1, C_2 : Parámetros.

Reemplazando los valores de k tenemos un sistema de 4 ecuaciones, con 4 incógnitas:

$$M_o^0 d - 0 - 1M_o^0 C_1 - 2M_o^1 C_2 = M_o^1 \quad [38]$$

$$M_o^1 d - 1M_o^0 C_o - 2M_o^1 C_1 - 3M_o^2 C_2 = M_o^2 \quad [39]$$

$$M_o^2 d - 2M_o^1 C_o - 3M_o^2 C_1 - 4M_o^3 C_2 = M_o^3 \quad [40]$$

$$M_o^3 d - 3M_o^2 C_o - 4M_o^3 C_1 - 5M_o^4 C_2 = M_o^4 \quad [41]$$

Las cuales pueden ser resueltas mediante métodos matriciales.

Familia de Curvas Pearson

La familia Pearson contiene a las siguientes distribuciones de probabilidad:

Distribución Normal

Distribución exponencial

Distribución gamma

Distribución Pearson tipo III

Distribuciones de Probabilidad pertenecientes a la Familia de Curvas Pearson

Distribución Normal

La distribución normal surge del teorema del límite central, el cual establece que si una secuencia de variables aleatorias X_i son independientes y están idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2 , entonces la distribución de la suma de n de estas variables aleatorias, $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, tiende hacia la distribución normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$ a medida que n aumenta. El punto importante es que, esto es cierto sin importar cuál es la función de distribución de probabilidad de X . Así, por ejemplo, la distribución de probabilidad de la media de la muestra $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ puede aproximarse, como una distribución normal con media μ y varianza $(1/n)^2 n\sigma^2 = \sigma^2/n$ sin importar cuál es la distribución de X . Las variables hidrológicas, como la precipitación anual, calculadas como la suma de los efectos de muchos eventos independientes tienden a seguir distribución normal. Las principales limitaciones de la distribución normal en la descripción de variables hidrológicas son, por un lado, que ésta varía a lo largo de un rango continuo $[-\infty, \infty]$, mientras que la mayor parte de las variables hidrológicas son no negativas, y por otro lado, que es simétrica alrededor de la media, mientras que la información hidrológica tiende a ser asimétrica (CHOW. 1994).

Función de Densidad de Probabilidad Normal

Sea la función real de variable real:

$$g(x) = \frac{-(x-d)}{C_2x^2 + C_1x + C_0}$$

Para $C_2 = C_1 = 0$ y $g(x)$ queda definida como $g(x) = \frac{-(x-d)}{C_0}$

Entonces su función de densidad de probabilidad es:

$$\frac{df(x)}{f(x)} = g(x)dx$$

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{-(x-d)dx}{C_0} = \frac{-1}{C_0} \int (x-d)dx$$

$$\ln f(x) = \frac{-1}{C_0} \left[\frac{(x-d)^2}{2} + C \right] = \frac{-1}{2} \left(\frac{x-d}{\sqrt{C_0}} \right)^2 + C$$

$$\ln f(x) = \frac{-1}{2} \left(\frac{x-d}{\sqrt{C_0}} \right)^2 + C$$

$$f(x) = Ke^{\frac{-1}{2} \left(\frac{x-d}{\sqrt{C_0}} \right)^2} \quad [42]$$

Calculamos la constante de integración K:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Ke^{\frac{-1}{2} \left(\frac{x-d}{\sqrt{C_0}} \right)^2} dx = 1$$

$$\frac{1}{K} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-1}{2} \left(\frac{x-d}{\sqrt{C_0}} \right)^2} dx$$

Hacemos cambio de variable $z = \frac{x-d}{\sqrt{C_0}} \rightarrow \sqrt{C_0}dz = dx$ y reemplazando tenemos

$$\frac{1}{K\sqrt{C_0}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \int_{-\infty}^0 e^{\frac{-z^2}{2}} dz + \int_0^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = 2 \int_0^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

$$\frac{1}{K\sqrt{C_0}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \int_0^n e^{\frac{-z^2}{2}} dz \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n e^{\frac{-z^2}{2}} dz \right) = \sqrt{2\pi}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{C_0}\sqrt{2\pi}} \quad [43]$$

Donde $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$ es la integral de Gauss cuyo valor es $\sqrt{2\pi}$, por consiguiente, la constante de integración es $K = \frac{1}{\sqrt{C_0}\sqrt{2\pi}}$. Se dice entonces que una variable aleatoria continua X , tiene una distribución Normal con parámetros $d = \mu$, $\sqrt{C_0} = \sigma$, si su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} \quad [44]$$

Representada por $X \sim N(\mu, \sigma)$, significa que X obedece una distribución normal de parámetros μ y σ .

Definida en el intervalo: $-\infty < x < \infty$

Donde:

$f(x)$: Función de densidad de probabilidad Normal.

σ : Parámetro de escala.

μ : Parámetro localización.

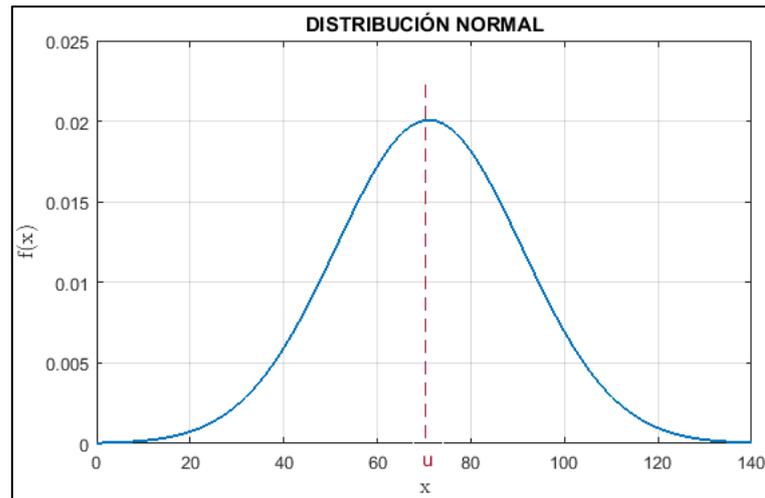


Figura 4. Función de densidad de probabilidad Normal.

Fuente: Elaboración propia.

Siendo la variable reducida $z = \frac{x - \bar{x}}{S_x}$, donde \bar{x} es el promedio y S_x es la desviación estándar muestral. La función de densidad de z , se llama función de densidad de la distribución normal estándar y queda definida mediante la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad [45]$$

Definida en $-\infty < x < \infty$

Los valores de $f(x)$ y $f(z)$, pueden ser fácilmente evaluados para un valor dado de x o de z por las ecuaciones anteriores, respectivamente.

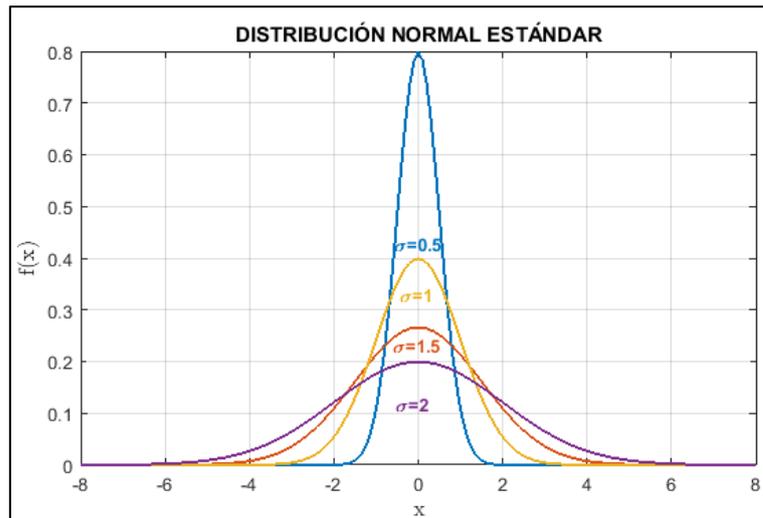


Figura 5. Función de densidad de probabilidad Normal Estándar para diferentes valores de σ .

Fuente: Elaboración propia.

Una característica fundamental de la distribución normal estándar es que tiene $\mu_z = 0$ y $\sigma^2_z = 1$, es decir está representada por $Z \sim N(0,1)$.

Función de Densidad de Probabilidad Acumulada Normal.

La función de distribución acumulada de la distribución normal, es la integral de la Ec. [44]:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2} dx$$

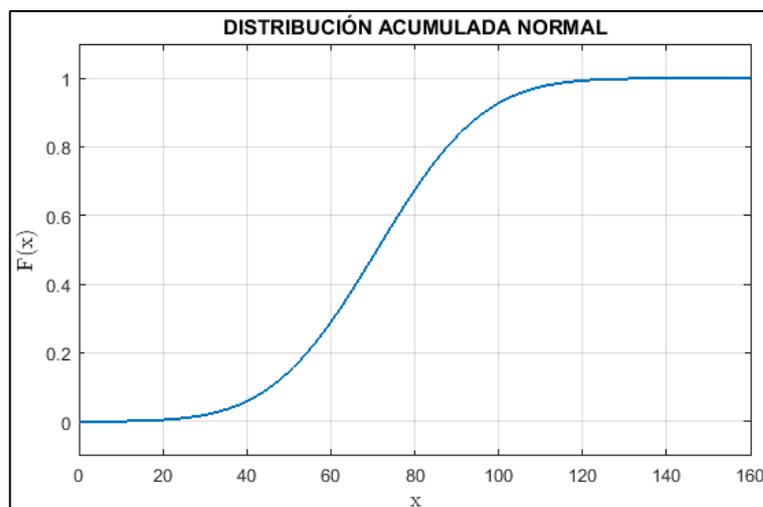


Figura 6. Función de densidad de probabilidad acumulada Normal.

Fuente: Elaboración propia.

Cambio de variable:

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$dz = dx/\sigma_x$$

$$dx = \sigma_x dz$$

Entonces.

$$F(z) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma_x dz$$

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad [46]$$

Donde:

$F(x)$: Es la función de densidad acumulada de la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X o también para la variable estandarizada z , cumple que:

$$F(x) = F(z)$$

Esta función de densidad acumulada tiene las siguientes propiedades.

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(\bar{x}) = 0.5$$

$$F(+\infty) = 1$$

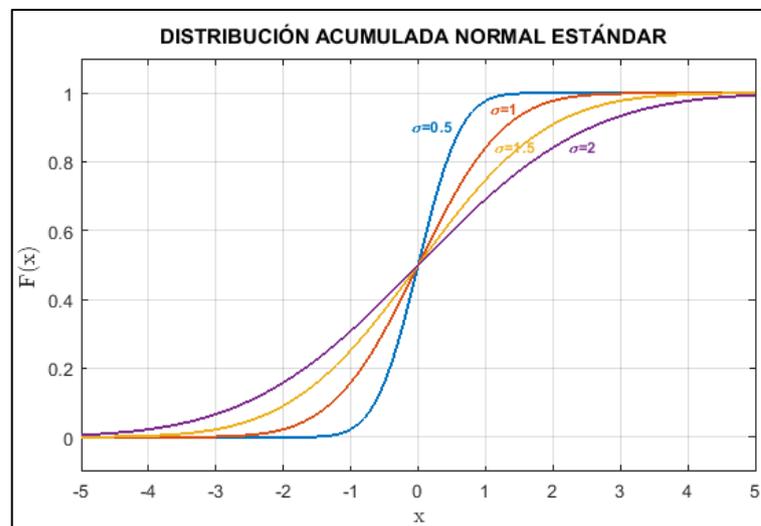


Figura 7. Función de densidad de probabilidad acumulada Normal Estándar.

Fuente: Elaboración propia.

Inversa de la Función de Densidad de Probabilidad Acumulada Normal

La función inversa de la función de densidad de probabilidad acumulada de la distribución Normal Estándar es:

$$F(X \leq x) = 1 - P(X > x)$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{T}$$

$$x = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right) \quad [47]$$

Donde

T: período de retorno

$F^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right)$: Función inversa de la función de densidad de probabilidad acumulada Normal.

Ecuaciones de Jhoben para la Aproximación de la Distribución Normal

Función de Densidad de Probabilidad Normal Aproximada.

La función de densidad de probabilidad Normal se puede aproximar mediante la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \approx \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}}{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 + 1} \quad [48]$$

Donde:

σ : Parámetro de escala.

μ : Parámetro localización.

Función de Densidad de Probabilidad Acumulada Normal Aproximada.

La función de densidad de probabilidad acumulada normal se puede aproximar mediante la siguiente expresión:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx \approx \int_{-\infty}^x \frac{1/(\sigma\sqrt{2\pi})}{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 + 1} dx$$

Cambio de variable.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow x = \mu + \sigma z$$

$$dz = \frac{dx}{\sigma} \rightarrow dx = \sigma dz$$

Entonces

$$F(z) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \frac{\sigma dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \frac{dz}{z^2 + 1}$$

Sustitución trigonométrica

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}} \rightarrow (\cos \theta)^2 = \frac{1}{z^2 + 1}$$

$$\tan \theta = z \rightarrow (\sec \theta)^2 d\theta = dz$$

Entonces

$$F(\theta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta} (\cos \theta)^2 (\sec \theta)^2 d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta} (\cos \theta)^2 \frac{1}{(\cos \theta)^2} d\theta$$

$$F(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta} d\theta = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \theta \right]_{-\infty}^{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\arctan(z)]_{-\infty}^z$$

$$F(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\arctan(z) - \arctan(-\infty)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\arctan(z) - \frac{\pi}{2} \right]$$

$$F(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\arctan(z) - \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\arctan\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

$$F(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\arctan\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) - \frac{\pi}{2} \right] \quad [49]$$

Para que la función $F(x)$ tenga una mejor aproximación a la función de densidad de probabilidad acumulada normal se agrega un tercer coeficiente, llamado coeficiente de ajuste de Jhowen, el cual es constante para cualquier serie de datos. Quedando así la expresión anterior.

$$F(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\arctan\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) - \frac{\pi}{2\xi} \right] \quad [50]$$

Donde:

$\xi = 1.25$: Coeficiente de ajuste de Jhowen.

Inversa de la Función de Densidad de Probabilidad Acumulada Normal

Aproximada.

$$P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{T}$$

Reemplazamos la ecuación [50] en la expresión anterior y obtenemos.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\arctan\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) - \frac{\pi}{2\xi} \right] = 1 - \frac{1}{T}$$

$$\tan \left\{ \sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{1}{T} \right) + \frac{\pi}{2\xi} = \arctan \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}$$

$$\tan \left(\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{1}{T} \right) + \frac{\pi}{2\xi} \right) = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$x = F^{-1} \left(1 - \frac{1}{T} \right) = \mu + \sigma \tan \left(\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{1}{T} \right) + \frac{\pi}{2\xi} \right) \quad [51]$$

Donde

T: período de retorno

$F^{-1} \left(1 - \frac{1}{T} \right)$: Función inversa de la función de densidad de probabilidad acumulada

Normal

Distribución Exponencial.

Algunas secuencias de eventos hidrológicos, como la ocurrencia de precipitación, pueden considerarse como procesos de Poisson, en los cuales los eventos ocurren instantánea e independientemente en un horizonte de tiempo, o a lo largo de una línea. El tiempo entre tales eventos, o tiempo de inter-arribo, está descrito por una distribución exponencial cuyo parámetro λ es la tasa media de ocurrencia de los eventos. La distribución exponencial se utiliza para describir los tiempos de inter-arribo de choques aleatorios a sistemas hidrológicos, tales como volúmenes de escorrentía contaminada que entran en los ríos a medida que la lluvia lava los contaminantes localizados en la superficie del terreno. La ventaja de la distribución exponencial radica en que es fácil estimar λ a partir de la información observada y que la distribución exponencial se adapta muy bien a estudios teóricos, tales como un modelo de probabilidad para el embalse lineal ($\lambda = 1/k$, donde k es la constante de almacenamiento en el embalse lineal). Su desventaja es que requiere que la ocurrencia de cada evento sea completamente independiente de sus vecinos, lo cual puede ser un supuesto no válido para el proceso en estudio, por ejemplo, el arribo de un frente puede generar muchos procesos de lluvia y esto ha llevado a los investigadores a estudiar varias formas de procesos de Poisson compuestos, en los cuales λ se considera como una variable aleatoria en lugar de una constante (KAVVAS, DELLEUR. 1981; WAYMIRE, GUPTA. 1981).

Función de Densidad de Probabilidad Exponencial

Sea la función real de variable real:

$$g(x) = \frac{-(x-d)}{C_2x^2 + C_1x + C_0}$$

Para $C_2 = C_1 = 0, C_0 = -1$ y $x = 0$, $g(x)$ queda definida como $g(x) = -d$. Entonces su función de densidad de probabilidad es:

$$\frac{df(x)}{f(x)} = g(x)dx$$

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int -(d)dx = -dx + C$$

$$\ln f(x) = -dx + C$$

$$f(x) = e^{-(d)x+C} = e^{-(d)x} e^C = e^{-(d)x} K$$

$$f(x) = Ke^{-(d)x} \quad [52]$$

Calculamos la constante de integración K:

$$F(x) = \int_0^{\infty} Ke^{-(d)x} dx = 1$$

$$\frac{1}{K} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{-d} \int_0^x e^{-(d)x} (-d) dx \right]$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{-d} \lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-(d)x}]_0^x = \frac{1}{-d} \lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-(d)x} - 1] = \frac{1}{-d} [e^{-\infty} - 1] = \frac{1}{-d} [0 - 1]$$

$$K = d \quad [53]$$

Se dice entonces que una variable aleatoria continua X, tiene una distribución Exponencial con parámetro $d = \lambda$ si su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad [54]$$

Representada por $X \sim \text{exp}(\lambda)$, significa que X obedece una distribución exponencial de parámetro λ .

Definida en el intervalo $x \geq 0$.

Donde

$f(x)$: Función de densidad de probabilidad exponencial.

λ : Parámetro de escala.

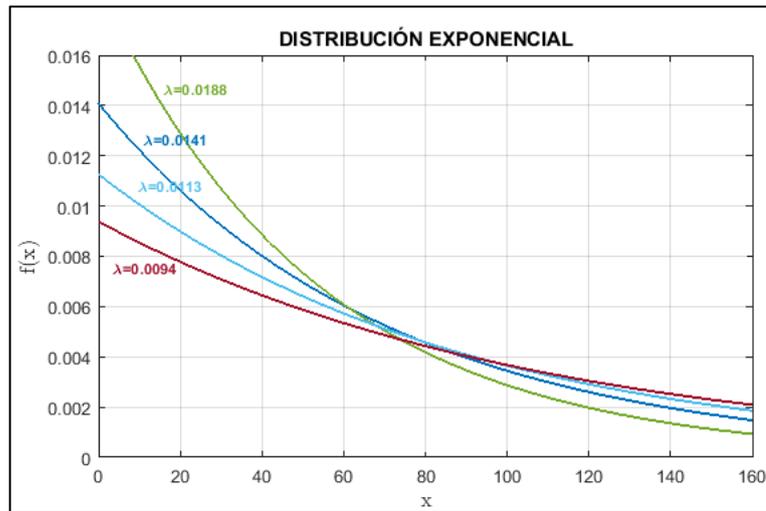


Figura 8. Función de densidad de probabilidad Exponencial.

Fuente: Elaboración propia.

Función de Densidad de Probabilidad Acumulada Exponencial

La función de densidad acumulada de la distribución Exponencial con parámetro λ es:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$F(x) = [-e^{-\lambda x}]_0^x$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

[55]

Donde

$F(x)$: Función de densidad de probabilidad acumulada Exponencial.

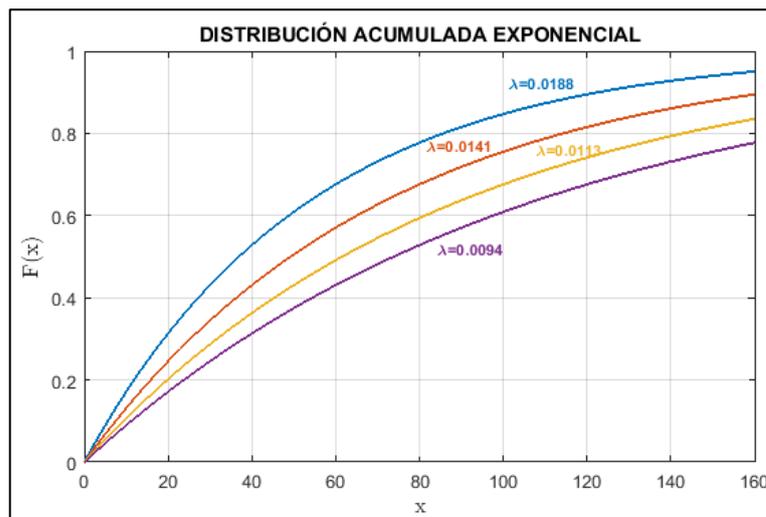


Figura 9. Función de densidad de probabilidad acumulada Exponencial.

Fuente: Elaboración propia.

Inversa de la Función de Densidad de Probabilidad Acumulada Exponencial.

La función inversa de la función de densidad acumulada de la distribución Exponencial es:

$$F(X \leq x) = 1 - P(X > x)$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{T}$$

Reemplazamos la ecuación [55] en la expresión anterior y obtenemos.

$$(1 - e^{-\lambda x}) = 1 - \frac{1}{T}$$

$$\frac{1}{T} = e^{-\lambda x}$$

$$\ln\left\{\frac{1}{T} = e^{-\lambda x}\right\}$$

$$x = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{T}\right) \quad [56]$$

Donde

T: período de retorno

$F^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right)$: Función inversa de densidad de probabilidad acumulada Exponencial.

Distribución Gamma

El tiempo que toma la ocurrencia de un número β de eventos en un proceso de Poisson está descrito por la distribución gamma, la cual es la distribución de una suma de β variables aleatorias independientes e idénticas, distribuidas exponencialmente. Es muy útil para la descripción de variables hidrológicas asimétricas sin el uso de la transformación logarítmica. Se ha aplicado a la descripción de la distribución de profundidades de precipitación en tormentas, por ejemplo. La distribución gamma incluye la función gamma $\Gamma(\alpha)$, la cual está dada por $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)! = (\alpha - 1) (\alpha - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ para un entero positivo α (ABRAMOWITZ, STEGUN. 1965) y en general:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} \mu^{\alpha-1} e^{-\mu} d\mu \quad [57]$$

La distribución gamma de dos parámetros (parámetros α y λ) tiene como límite inferior cero, lo cual es una desventaja para la aplicación a variables hidrológicas que tienen un límite inferior a cero.

Función de Densidad de Probabilidad Gamma

Sea la función real de variable real:

$$g(x) = \frac{-(x-d)}{C_2x^2 + C_1x + C_0}$$

Para $C_2 = C_0 = 0$, $g(x)$ queda definida como $g(x) = \frac{-(x-d)}{C_1x}$

$$\frac{df(x)}{f(x)} = g(x)dx$$

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{-(x-d)dx}{C_1x} = \frac{-1}{C_1} \int dx + \frac{d}{C_1} \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln f(x) = -\frac{x}{C_1} + \frac{d}{C_1} \ln x + C$$

$$f(x) = e^{-\frac{x}{C_1} + \frac{d}{C_1} \ln x + C} = e^{-\frac{x}{C_1}} e^{\frac{d}{C_1} \ln x} e^C = e^{-\frac{x}{C_1}} e^{\ln x \frac{d}{C_1}} K = e^{-\frac{x}{C_1} \frac{d}{C_1}} K$$

$$f(x) = K e^{-\frac{x}{C_1} \frac{d}{C_1}}$$

[58]

Calculamos la constante de integración K:

$$F(x) = \int_0^{\infty} K e^{-\frac{x}{C_1} \frac{d}{C_1}} = 1$$

$$\frac{1}{K} = \int_0^{\infty} x^{\frac{d}{C_1}} e^{-\frac{x}{C_1}} dx$$

Cambio de constante: $\frac{d}{C_1} = \alpha - 1, \frac{1}{C_1} = \lambda$.

$$\frac{1}{K} = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

Cambio de variable.

$$\lambda x = z \rightarrow x = \frac{z}{\lambda}$$

$$\lambda dx = dz \rightarrow dx = \frac{dz}{\lambda}$$

Entonces.

$$\frac{1}{K} = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-z} \frac{dz}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^{\alpha}} \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz$$

$$K = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$$

[59]

Donde $\int_0^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz$ es la integral de Euler cuyo valor es la función gamma $\Gamma(\alpha)$, por

consecuencia, la constante de integración es $K = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$. Se dice entonces que una variable

aleatoria continua X , tiene una distribución gamma con parámetro λ, α si su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda x}$$

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \quad [60]$$

Representada por $X \sim \text{gamma}(\alpha, \lambda)$, significa que X obedece una distribución gamma de parámetro λ y α . Definida en el intervalo $x \geq 0$

Donde:

$f(x)$: Función de densidad de probabilidad Gamma.

λ : Parámetro de escala.

α : Parámetro de forma.

$\Gamma(\alpha)$: Función Gamma.

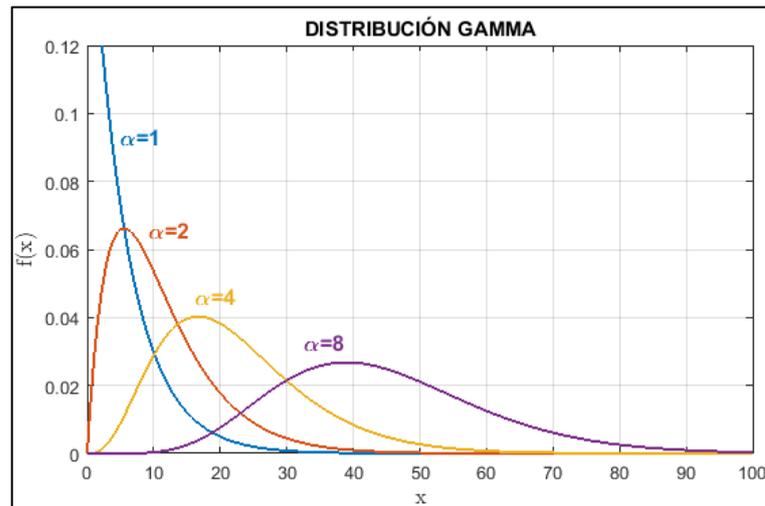


Figura 10. Función de densidad de probabilidad Gamma para diferentes valores de α .

Fuente: Elaboración propia.

Nota: Cuando $\alpha = 1$ la distribución gamma se convierte en una distribución exponencial.

Función Gamma

La función Gamma, denotada por $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du$, tiene las siguientes propiedades:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

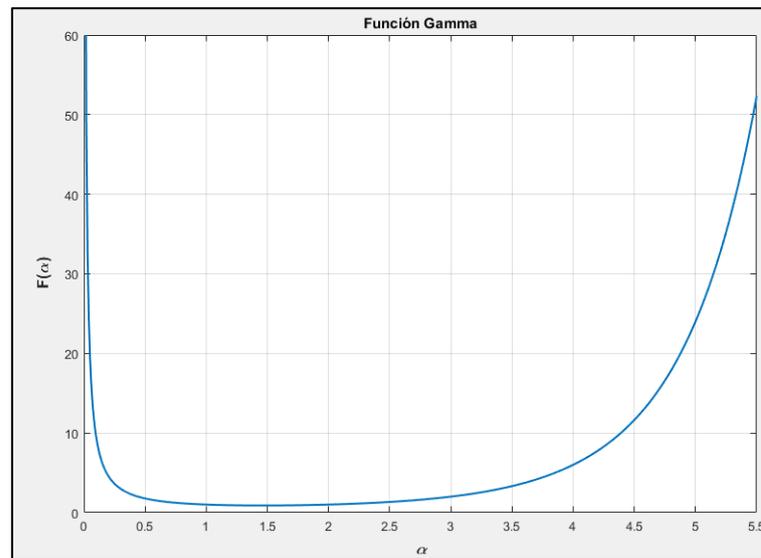


Figura 11. Función Gamma.

Fuente: Elaboración propia.

Cálculo aproximado de la función gamma $\Gamma(\alpha)$

Aproximación factorial de Stirling (para α)

$$\Gamma(\alpha + 1) = (\sqrt{2\pi\alpha})\alpha^\alpha e^{-\alpha}$$

Serie asintótica de Stirling

$$\Gamma(\alpha) = \alpha^\alpha e^{-\alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \left[1 + \frac{1}{12\alpha^1} + \frac{1}{288\alpha^2} - \frac{139}{51840\alpha^3} - \frac{571}{2488320\alpha^4} + \frac{163879}{209018880\alpha^5} + \frac{5246819}{75246796800\alpha^6} \right] \quad [61]$$

Función de Densidad de Probabilidad Acumulada Gamma

La función de densidad de probabilidad acumulada Gamma con parámetros λ y α es:

$$F(x) = \int_0^x \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Haciendo cambio de variable:

$$y = \lambda x \quad \rightarrow \quad x = \frac{y}{\lambda}$$

$$dy = \lambda dx$$

Y reemplazando

$$G(y) = \int_0^y \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} dy \quad [62]$$

Donde

y: Variable reducida Gamma.

G(x): Función de densidad acumulada Gamma

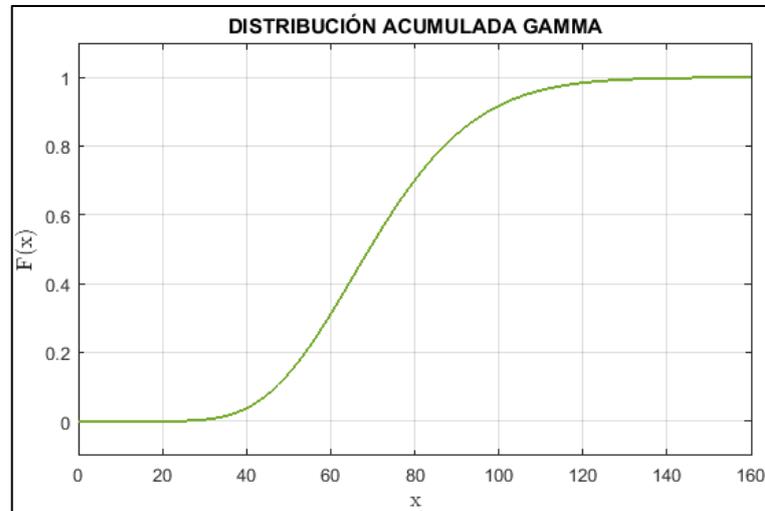


Figura 12. Función de densidad de probabilidad acumulada Gamma.

Fuente: Elaboración propia.

Cálculo Aproximado de la Función de Densidad Acumulada Gamma:

La solución de la integral de la función gamma reducida, se puede obtener por el desarrollo de la serie:

$$G(y) = \frac{e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{y^\alpha}{\alpha} + \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + \dots + \frac{y^{\alpha+n-1}}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)} \right)$$

$$G(y) = \frac{e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^n \frac{y^{\alpha+i-1}}{\prod_{j=1}^k (\alpha+i-1)} \tag{63}$$

Inversa de la Función de Densidad de Probabilidad Acumulada Gamma

La función inversa de la función de densidad acumulada de la distribución Gamma es:

$$F(X \leq x) = 1 - P(X > x)$$

$$G(y) = 1 - \frac{1}{T}$$

$$y = G^{-1} \left(1 - \frac{1}{T}, \alpha \right)$$

$$x = \frac{1}{\lambda} G^{-1} \left(1 - \frac{1}{T} \right) \tag{64}$$

Donde

T: período de retorno.

$G^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right)$: Inversa de la función de densidad de probabilidad acumulada Gamma

Distribución Pearson tipo III

La distribución Pearson tipo III, también llamada la distribución gamma de tres parámetros, introduce un tercer parámetro el límite inferior ϵ , de tal manera que, por el método de los momentos, los tres momentos de la muestra (la media, la desviación estándar y el coeficiente de asimetría) pueden transformarse en los tres parámetros λ , β , y ϵ de la distribución de probabilidad. Esta es una distribución muy flexible, que puede asumir diferentes formas a medida que λ , β , y ϵ varían (BOBEE, ROBITAILLE. 1977).

Función de Densidad de Probabilidad Pearson tipo III

Sea la función real de variable real:

$$g(x) = \frac{-(x-d)}{C_2x^2 + C_1x + C_0}$$

Para $C_2 = C_0 = 0$, $g(x)$ queda definida como $g(x) = \frac{-(x-d)}{C_1x}$

$$\frac{df(x)}{f(x)} = g(x)dx$$

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{-(x-d)dx}{C_1x} = \frac{-1}{C_1} \int dx + \frac{d}{C_1} \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln f(x) = -\frac{x}{C_1} + \frac{d}{C_1} \ln x + C$$

$$f(x) = e^{-\frac{x}{C_1} + \frac{d}{C_1} \ln x + C} = e^{-\frac{x}{C_1}} e^{\frac{d}{C_1} \ln x} e^C = e^{-\frac{x}{C_1}} e^{\ln x \frac{d}{C_1}} K = e^{-\frac{x}{C_1} x \frac{d}{C_1}} K$$

$$f(x) = Ke^{-\frac{x}{C_1} x \frac{d}{C_1}} \tag{65}$$

Agregamos tercer parámetro

$$f(x) = Ke^{-\frac{(x-\epsilon)}{C_1} (x-\epsilon) \frac{d}{C_1}} \tag{66}$$

Calculamos la constante de integración K:

$$F(x) = \int_0^\infty Ke^{-\frac{x}{C_1} x \frac{d}{C_1}} = 1$$

$$\frac{1}{K} = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{C_1} x \frac{d}{C_1}} dx$$

Cambio de constante $\frac{d}{C_1} = \alpha - 1$, $\frac{1}{C_1} = \lambda$.

$$\frac{1}{K} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} dx$$

Cambio de variable.

$$\lambda x = z \rightarrow x = \frac{z}{\lambda}$$

$$\lambda dx = dz \rightarrow dx = \frac{dz}{\lambda}$$

Reemplazando.

$$\frac{1}{K} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-z} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \frac{dz}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\alpha-1} dz$$

$$K = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \quad [67]$$

Donde $\int_0^{\infty} e^{-z} z^{\alpha-1} dz$ es la integral de Euler cuyo valor es la función gamma $\Gamma(\alpha)$, por consiguiente, la constante de integración es $K = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$. Se dice entonces que una variable aleatoria continua X , tiene una distribución Pearson III con parámetros $\lambda, \epsilon, \alpha$ si su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{(\lambda(x - \epsilon))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda(x-\epsilon)}$$

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (x - \epsilon)^{\alpha-1} e^{-\lambda(x-\epsilon)} \quad [68]$$

Representada por $X \sim \text{Pearson}(\alpha, \lambda, \epsilon)$, significa que X obedece una distribución Pearson de parámetro $\alpha, \lambda, \epsilon$.

Definida en: $\epsilon \leq x < \infty, -\infty < \epsilon < \infty, 0 < \lambda < \infty, 0 < \alpha < \infty$

Donde:

$f(x)$: Función de densidad de probabilidad Pearson III.

ϵ : Parámetro de posición (origen de la variable x).

λ : Parámetro de escala.

α : Parámetro de forma.

$\Gamma(\alpha)$: Función Gamma.

Función de Densidad de Probabilidad Acumulada Pearson tipo III

La función de densidad de probabilidad acumulada Pearson con parámetros $\lambda, \alpha, \epsilon$ es:

$$F(x) = \int_0^x \frac{(\lambda(x - \epsilon))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda(x-\epsilon)} dx$$

Cambio de variable.

$$y = \lambda(x - \epsilon) \rightarrow (x - \epsilon) = \frac{y}{\lambda}$$

$$dy = \lambda dx$$

Entonces.

$$G(y) = \int_0^y \frac{(y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-y} \frac{dx}{\lambda}$$

$$G(y) = \int_0^y \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} dy \quad [69]$$

Donde

y: Variable reducida Pearson.

G(y): Función de densidad de probabilidad acumulada Pearson.

Cálculo aproximado de la Función de Densidad de Probabilidad Acumulada Pearson tipo III

La solución de la integral de la función gamma reducida, se puede obtener por el desarrollo de la serie:

$$G(y) = \frac{e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{y^\alpha}{\alpha} + \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + \dots + \frac{y^{\alpha+n-1}}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)} \right)$$

$$G(y) = \frac{e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^n \frac{y^{\alpha+i-1}}{\prod_{j=1}^k (\alpha+i-1)} \quad [70]$$

Inversa de la Función de Densidad de Probabilidad Acumulada Pearson tipo III

La función inversa de la función de densidad acumulada de la distribución Pearson es:

$$F(X \leq x) = 1 - P(X > x)$$

$$G(y) = 1 - \frac{1}{T}$$

$$y = G^{-1} \left(1 - \frac{1}{T}, \alpha \right)$$

$$x = \frac{1}{\lambda} G^{-1} \left(1 - \frac{1}{T} \right) + \epsilon \quad [71]$$

T: Período de retorno.

$G^{-1} \left(1 - \frac{1}{T} \right)$: Inversa de la función de densidad acumulada Pearson.

Función Generadora de Probabilidad Polinómica

Se entiende por función generadora de probabilidad a la derivada del logaritmo de la función de densidad para los puntos en que la derivada existe y la densidad no es cero

Callejón (1995). En este trabajo se han estudiado los casos en que $g(x)$ es un polinomio, dentro de esta familia de funciones polinómicas se eligen solo las de grado impar porque son las que dan lugar a una función de densidad que delimita con el eje de las abscisas un recinto de área finita.

$$\frac{df(x)}{f(x)} = g(x)dx$$

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int g(x)dx$$

$$\ln f(x) = \int g(x)dx + C$$

$$f(x) = e^{\int g(x)dx + C} = e^C e^{\int g(x)dx} = K e^{G(x)}$$

$$f(x) = K e^{G(x)} \epsilon \quad [72]$$

Donde la función real de variable real es un polinomio definido por la siguiente sumatoria:

$$g(x) = \sum_{i=0}^r C_i x^i \quad [73]$$

$g(x)$: Polinomio de grado impar “r”.

K: Constante de integración.

La estimación de los parámetros se realiza a través del método de los momentos pesados, sin más que resolver el sistema de $r + 1$ ecuaciones, que se obtiene al hacer $k = 0, 1, 2, 3$ en la siguiente expresión.

$$\sum_{i=0}^r C_i M_o^{(i+k)} + k M_o^{(k-1)} = 0 \quad [74]$$

Donde:

M_o^k : Momento con respecto al origen, de orden k

C_i : Parámetro i.

La relación recurrente establecida en [74], de momentos respecto al origen de la distribución (HERRERÍAS, PALACIOS, RAMOS. 1996), permite utilizar tantas ecuaciones como sean necesarias para obtener los coeficientes del polinomio.

Este método posee dos propiedades que lo distinguen y lo hacen preferible a la función generadora de probabilidad Pearson:

- a) Los estimadores obtenidos son de máxima verosimilitud, puesto que cuando la función generadora de probabilidad es un polinomio, los métodos de máxima verosimilitud y de los momentos pesados coinciden (CALLEJÓN, SANTOS. 1994).

- b) Se realizan ajustes para distintos grados de la función Polinómica, permitiendo así una cierta flexibilidad.

Función Generalizada de Valores Extremos

Los valores extremos son valores máximos o mínimos seleccionados de un conjunto de datos. Por ejemplo, la precipitación máxima anual en un lugar dado es la mayor precipitación registrada durante un año y los valores de precipitación máxima anual para cada año de registro histórico conforman un conjunto de valores extremos que puede analizarse estadísticamente. Fisher y Tippett han demostrado que las distribuciones de valores extremos seleccionados de conjuntos de muestras de cualquier distribución de probabilidad convergen en una de las tres formas de distribuciones de valor extremo, llamadas tipo I, II y III respectivamente, cuando el número de valores extremos seleccionados es grande (FISHER, TIPPETT. 1928).

Cuadro 5. Distribuciones Límite para los máximos GEV.

Fuente: La Teoría del Valor Extremo, Almudena García Pérez (2004).

Distribuciones Límite para los máximos GEV	
Distribución $f(x)$	GEV $f_{\max}(x)$
Exponencial Gamma Normal	TIPO I
Parapeto Cauchy Burr	TIPO II
Uniforme Beta	TIPO III

La distribución límite $GEV(x)$ siempre pertenece a una de estas tres distribuciones, sea cual sea la distribución original de los datos $F(x)$, es decir, la distribución asintótica de los máximos se puede estimar sin realizar suposiciones acerca de la naturaleza de la distribución original de las observaciones, generalmente desconocida.

Las propiedades de las tres formas limitantes fueron desarrolladas en mayor detalle por Gumbel (1941) para la distribución de Valor Extremo tipo I (EVI, por sus siglas en inglés), por Frechet (1927) para la distribución de Valor Extremo tipo II (EVII) y por Weibull (1939) para la distribución de Valor Extremo tipo III (EVIII). Jenkinson (1955)

demostró que estas tres formas limitantes eran casos especiales de una distribución única llamada la distribución de Valor Extremo General (GEV, por sus siglas en inglés).

La función de densidad de probabilidad para la distribución GEV es:

$$GEV(x) = e^{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} \quad [75]$$

El parámetro ξ es el parámetro de forma o índice de cola. El valor del mismo identificará la distribución y determinará el grosor de la cola. Cuanto mayor sea ese índice, más gruesa será la cola.

- 1) Para $k \rightarrow 0$, la distribución del GEV se convierte en el Valor Extremo tipo I (colas medias). Donde $-\infty \leq x \leq \infty$.

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} GEV(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} e^{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}}$$

Cambio de variable:

Sí $\gamma = \frac{1}{\xi}$ y $\xi \rightarrow 0$ entonces $\gamma \rightarrow \infty$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} GEV(x) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} e^{-\left(1+\frac{1x-\mu}{\gamma\sigma}\right)^{-\gamma}}$$

Cambio de variable: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} GEV(z) = e^{\lim_{\gamma \rightarrow \infty} -\left(1+\frac{1}{\gamma z}\right)^{-\gamma}} = e^{-\frac{1}{\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{\gamma z}\right)^{\gamma}}} = e^{-\frac{1}{e^z}} = e^{-e^{-z}}$$

Por Lo tanto:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} GEV(x) = EVI(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}} \quad [76]$$

EVI(x): Valor Extremo tipo I.

- 2) Para $k > 0$, la distribución de Valor Extremo tipo II (colas gruesas), se aplica en:

$$\left(\mu + \frac{\sigma}{\xi}\right) \leq x \leq \infty$$

- 3) Para $k < 0$, la distribución de Valor Extremo tipo III (colas cortas o suaves), se aplica en:

$$-\infty \leq x \leq \left(\mu + \frac{\sigma}{\xi}\right)$$

En todos los casos, se supone que σ es positivo.

Para la distribución EVI, x no tiene límites, mientras que para EVII, x está acotado por abajo por $(\mu + \sigma / \xi)$, y para la distribución EVIII, x está similarmente acotado por arriba. Las distribuciones EVI y EVII también se conocen como las distribuciones Gumbel y Frechet respectivamente. Si una variable x está descrita por la distribución EVIII, entonces se dice que $-x$ tiene una distribución Weibull.

Las distribuciones de valor extremo han sido ampliamente utilizadas en hidrología. Éstas forman la base para el método estándar de análisis de frecuencia de crecientes en Gran Bretaña (NATURAL ENVIRONMENT RESEARCH COUNCIL. 1975). Las tormentas de lluvia son comúnmente modeladas utilizando la distribución de Valor Extremo Tipo 1 (CHOW. 1953; TOMLINSON. 1980), y los flujos de estiaje mediante la distribución Weibull, es decir, la distribución EVIII aplicada a $-x$ (GUMBEL, 1963).

Función de Densidad de Probabilidad GEV

Se dice entonces que una variable aleatoria continua X , tiene una distribución GEV con parámetros σ , μ , ξ si su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\xi} + 1\right)} e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} \quad [77]$$

Representada por $X \sim gev(\sigma, \mu, \xi)$, significa que X obedece una distribución GEV de parámetros σ , μ , ξ .

Definida en $x > \mu - \frac{\sigma}{\xi}$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > \infty$, $-\infty < \xi < \infty$.

Donde:

$f(x)$: Función de densidad de probabilidad GEV.

ξ : Parámetro de forma.

σ : Parámetro de escala.

μ : Parámetro de localización.

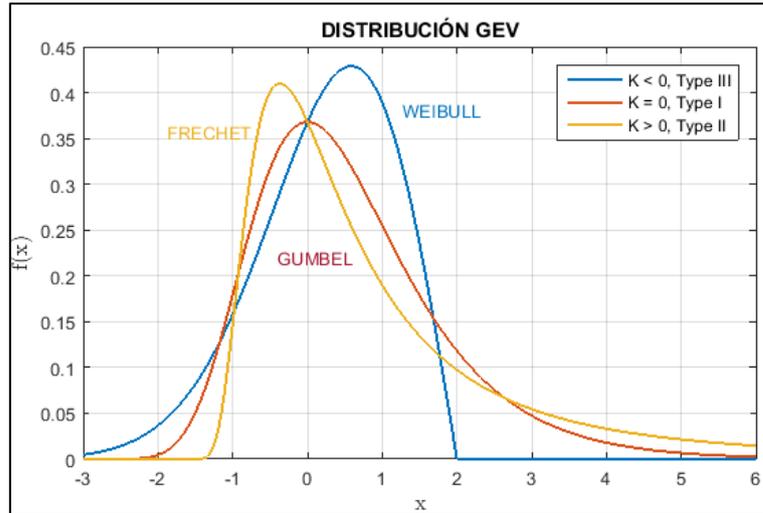


Figura 13. Función de densidad de probabilidad valor extremo generalizado.

Fuente: Elaboración propia.

Función de Densidad de Probabilidad Acumulada GEV

La función de densidad acumulada de la distribución GEV con parámetros σ , μ , ξ es:

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\xi} + 1\right)} e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} dx$$

$$F(x) = \left[e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} \right]_{x_0}^x$$

Para $x_0 = \mu - \frac{\sigma}{\xi}$ tenemos:

$$F(x) = e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} - e^{-\left(1 + \xi \frac{\mu - \frac{\sigma}{\xi} - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}}$$

$$F(x) = e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} - e^{-(1-1)^{1/\xi}} = e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} - e^{-\frac{1}{0^{1/\xi}}}$$

$$F(x) = e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} - e^{-\infty} = e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} - \frac{1}{e^{\infty}} = e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} - \frac{1}{\infty}$$

$$F(x) = e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}}$$

[78]

Donde

$F(x)$: Función de densidad de probabilidad acumulada GEV.

Inversa de la Función de Densidad de Probabilidad Acumulada GEV

$$F(X < x) = 1 - P(X \geq x)$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{T}$$

$$e^{-(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma})^{-1/\xi}} = 1 - \frac{1}{T}$$

$$\ln \left\{ e^{-(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma})^{-1/\xi}} = 1 - \frac{1}{T} \right\}$$

$$x = F^{-1} \left(1 - \frac{1}{T} \right) = \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left[(-\ln(1 - 1/T))^{-\xi} - 1 \right] \quad [79]$$

Donde

T: Período de retorno

$F^{-1} \left(1 - \frac{1}{T} \right)$: Función inversa de densidad de probabilidad acumulada GEV.

Distribuciones de Probabilidad pertenecientes a la función de Valores extremos generalizada

Distribución EVI o Gumbel.

Se dice que una variable aleatoria continua X, tiene una distribución EVI con parámetros μ, σ , si su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}} \quad [80]$$

Representada por $X \sim EVI(\mu, \sigma)$, significa que X obedece una distribución EVI de parámetros μ, σ .

Definida en el intervalo: $-\infty < x < \infty$

Donde

$f(x)$: Función de densidad de probabilidad EVI.

μ : Parámetro de localización.

σ : Parámetro de Escala.

Función de Densidad de Probabilidad Acumulada EVI

La función de densidad acumulada de la distribución EVI con parámetros μ, σ es:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}} dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}} dx$$

Cambio de variable.

$$z = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

$$\ln \left\{ z = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} \right\}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \ln(z) = -\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right\}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{-dx}{\sigma}$$

$$dx = \frac{-\sigma dz}{z}$$

Entonces.

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{1}{\sigma} (ze^{-z}) \frac{-\sigma dz}{z} = \int_{z_0}^z (e^{-z}) - dz = [e^{-z}]_{z_0}^z$$

$$F(x) = \left[e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}} \right]_{-\infty}^x = e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}} - e^{-e^{-\left(\frac{-\infty-\mu}{\sigma}\right)}} = e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}} - e^{-e^{\infty}}$$

$$F(x) = e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}} \quad [81]$$

Donde

$F(x)$: Función de densidad de probabilidad acumulada EVI.

Inversa de la Función de Densidad Acumulada EVI.

La función inversa de la función de densidad acumulada de la distribución EVI es:

$$F(X < x) = 1 - P(X \geq x)$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{T}$$

$$\ln \left\{ e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}} = 1 - \frac{1}{T} \right\}$$

$$\ln \left\{ e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} = -\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right\}$$

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = -\ln \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right)$$

$$x = F^{-1} \left(1 - \frac{1}{T} \right) = \mu - \sigma \ln \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right) \quad [82]$$

Donde:

T: Período de retorno.

$F^{-1} \left(1 - \frac{1}{T} \right)$: Inversa de la función de densidad de probabilidad acumulada EVI.

Distribución EVII o Frechet.

Se dice que una variable aleatoria continua X , tiene una distribución **EVII** con parámetros μ, σ, ξ , si su función densidad de probabilidad es:

$$f(x) = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} \frac{1}{\xi\sigma} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)} \quad [83]$$

Representada por $X \sim EVII(\mu, \sigma, \xi)$, significa que X obedece una distribución EVII de parámetros μ, σ, ξ .

Definida en el intervalo: $x \geq \mu$

Donde

$f(x)$: Función de densidad de probabilidad EVII.

ξ : Parámetro de forma.

σ : Parámetro de escala.

μ : Parámetro de localización.

Función de Densidad de Probabilidad Acumulada VEII

La función de densidad acumulada de la distribución VEII con parámetros α es:

$$F(x) = \int_{x_0}^x e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} \frac{1}{\xi\sigma} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)} dx$$

$$F(x) = \left[e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} \right]_u^x$$

Para $x_0 = \mu$, tenemos:

$$F(x) = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} - e^{-\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} - e^{-(0)^{-1/\xi}}$$

$$F(x) = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} - e^{-\frac{1}{0^\xi}} = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} - e^{-\infty} = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} - \frac{1}{e^\infty}$$

$$F(x) = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} \quad [84]$$

Donde:

$F(x)$: Función de densidad de probabilidad acumulada EVII.

Inversa de la Función de Densidad Acumulada EVII.

La función inversa de la función de densidad acumulada de la distribución EVII es:

$$F(X < x) = 1 - P(X \geq x)$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= 1 - \frac{1}{T} \\
\ln \left\{ e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} = 1 - \frac{1}{T} \right\} \\
\left\{ \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} = -\ln \left(1 - \frac{1}{T}\right) \right\}^{-\xi} \\
\frac{x-\mu}{\sigma} &= \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T}\right) \right]^{-\xi} \\
x = F^{-1} \left(1 - \frac{1}{T}\right) &= \mu + \sigma \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T}\right) \right]^{-\xi} \quad [85]
\end{aligned}$$

Donde:

T: período de retorno.

$F^{-1}(1 - \frac{1}{T})$: Función inversa de densidad probabilidad acumulada EVII.

Distribución EVIII o Weibull.

Se dice que una variable aleatoria continua X, tiene una distribución **EVIII** con parámetros μ, σ, ξ , si su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = e^{-\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right)} \frac{1}{\xi\sigma} \left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)} \quad [86]$$

Representada por $X \sim \text{EVIII}(\mu, \sigma, \xi)$, significa que X obedece una distribución EVIII de parámetros μ, σ, ξ .

Definida en el intervalo: $x \leq \mu$

Donde

$f(x)$: Función de densidad de probabilidad EVIII.

ξ : Parámetro de forma.

σ : Parámetro de escala.

μ : Parámetro de localización.

Función de Densidad de Probabilidad Acumulada VEIII

La función de densidad acumulada de la distribución VEIII con parámetros α es:

$$F(x) = - \int_x^{\infty} e^{-\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right)} \frac{-1}{\xi\sigma} \left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)} dx$$

$$F(x) = \left[-e^{-\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/\xi}} \right]_{\mu}^x$$

Para $x = \mu$, tenemos:

$$F(x) = -e^{-\left(-\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/\xi}} + e^{-\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/\xi}} = -e^{-\left(-\left(0\right)\right)^{-1/\xi}} + e^{-\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/\xi}}$$

$$F(x) = -e^{-\frac{1}{0}} + e^{-\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/\xi}} = -e^{-\infty} + e^{-\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/\xi}} = -\frac{1}{e^{\infty}} + e^{-\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/\xi}}$$

$$F(x) = e^{-\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/\xi}} \quad [87]$$

Donde:

$F(x)$: Función de densidad de probabilidad acumulada EVIII.

Inversa de la Función de Densidad de Probabilidad Acumulada EVIII.

La función inversa de la función de densidad acumulada de la distribución EVIII es:

$$F(X < x) = 1 - P(X \geq x)$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{T}$$

$$\ln \left\{ e^{-\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/\xi}} = 1 - \frac{1}{T} \right\}$$

$$\left\{ \left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right)^{-1/\xi} = -\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right\}^{-\xi}$$

$$\frac{\mu - x}{\sigma} = \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right]^{-\xi}$$

$$x = F^{-1}(x) = \mu - \sigma \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right]^{-\xi} \quad [88]$$

Donde:

T: período de retorno.

$F^{-1}(x)$: Función inversa de densidad probabilidad acumulada EVIII.

Función Generalizada de Probabilidad Empírica de Excedencia.

Es la probabilidad asignada a cada uno de los datos que van a graficarse. Se han propuesto numerosos métodos para la determinación de las posiciones de graficación, la mayoría de los cuales son empíricos. Sí “n” es el número total de los valores que van a ser graficados

y “m” es la posición de un valor en una lista ordenada por magnitud descendente, la fórmula general de probabilidad de excedencia está dada por:

$$P(X \geq x) = \frac{m - b}{n + 1 - 2b} \quad [89]$$

Dónde b es un parámetro que determina la fórmula empírica a utilizar.

Siendo las más utilizadas las presentadas en el siguiente cuadro.

Cuadro 6. Función Generalizada de Probabilidad Empírica de Excedencia.

Fuente: Hidrología Aplicada, Ven Te Chow (1994).

Fórmula	b	P(X>=x)
Hazen	0.5	$\frac{m - \frac{1}{2}}{n}$
Weibull	0	$\frac{m}{n + 1}$
Chegodayev	0.3	$\frac{m - 0.3}{n + 0.4}$
Blom	3/8	$\frac{m - 3/8}{n + 1/4}$
Tukey	1/3	$\frac{3m - 1}{3n + 1}$
Gringorten	0.44	$\frac{3m - 0.44}{3n + 0.12}$

Cunnane (1978) estudió los diferentes métodos disponibles para las posiciones de graficación utilizando criterios de varianza mínima y no sesgo. Un método de graficación no sesgado es aquel que, si se utiliza para la graficación de un número grande de muestras de igual tamaño, resultará en que el promedio de los puntos graficados para cada valor de “m” cae en la línea de distribución teórica.

Un método de graficación con varianza mínima es aquel que minimiza la varianza de los puntos graficados alrededor de la línea teórica. Cunnane concluyó que la ecuación de graficación de Weibull es sesgada y grafica los valores máximos de una muestra con periodos de retorno demasiado pequeños. Para datos normalmente distribuidos, él encontró que la posición de graficación ($b = 3/8$) de Blom (1958) está bastante cercana a ser no sesgada, mientras que para datos distribuidos de acuerdo con la distribución de

Valor Extremo Tipo 1, la fórmula de Gringorten ($b = 0.44$) (1963) es la mejor. Para la distribución log-Pearson Tipo III el valor óptimo de b depende del valor del coeficiente de asimetría, siendo mayor que $3/8$ cuando los datos tienen asimetría positiva y menor que $3/8$ cuando los datos tienen asimetría negativa. Las mismas posiciones de graficación pueden aplicarse a los logaritmos de los datos, cuando se utiliza la distribución log normal, por ejemplo.

Una vez que la serie de datos ha sido identificada y ordenada y las posiciones de graficación calculadas, puede elaborarse una gráfica de magnitud (x) vs. Probabilidad [$P(X \geq x)$, $P(X < x)$, o T] para ajustar gráficamente una distribución. Alternativamente, puede hacerse un ajuste analítico utilizando el método de los momentos y la línea ajustada resultante puede compararse con la información de la muestra.

Estimación de Parámetros Estadísticos

Los parámetros estadísticos son características de una población, tales como μ y σ . Un parámetro estadístico es el valor esperado “E” de alguna función de una variable aleatoria. Para una variable aleatoria X , la media es $\mu = E(x)$.

Para determinar los valores numéricos de los parámetros de la distribución teórica, a partir de los datos muestrales, se utilizan varios métodos de estimación, en la presente tesis se utilizará el método de los momentos pesados y el método de los momentos lineales que constituyen una metodología tradicional y moderna respectivamente.

Método de Momentos Pesados

El método de los momentos pesados o momentos tradicionales fue desarrollado por primera vez por Karl Pearson, él consideró que unos buenos estimativos de los parámetros de una función de probabilidad, son aquellos para los cuales los momentos de la función de densidad de probabilidad alrededor del origen son iguales a los momentos correspondientes de la información de la muestra (PEARSON. 1902).

Se calcula como el producto de x^k o $(x - \mu)^k$ y la correspondiente función de densidad de probabilidad $f(x)$, integrando sobre el rango factible de la variable aleatoria X , donde k es el orden del momento.

Definición de valor esperado

Si X es una variable aleatoria, con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y $\vartheta(x)$ es la función momento de X , entonces el valor esperado de $\vartheta(x)$ para X continua, se define de la siguiente manera.

$$E[\vartheta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x) f(x) dx \quad [90]$$

Donde a y b es el intervalo de integración factible para la función de densidad de probabilidad.

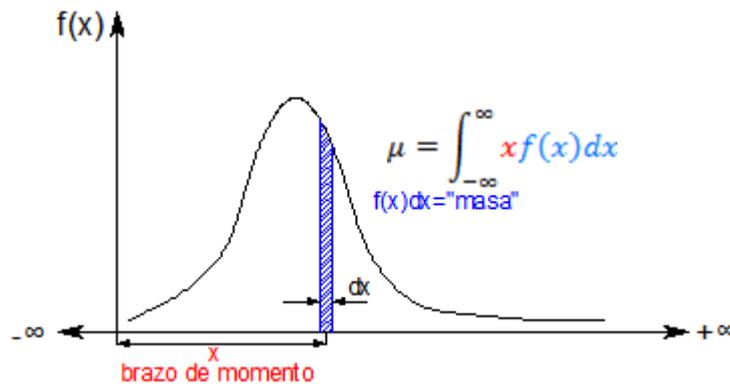


Figura 14. Primer momento alrededor del origen de la variable aleatoria, una medida del punto medio o "tendencia central" de la distribución.

Fuente: Hidrología Aplicada, Ven Te Chow (1994).

Propiedades del valor esperado

1. Sí $\vartheta(x) = C$ tte $\rightarrow E[\vartheta(x)] = C$ tte.
2. Sí $\vartheta(x) = a\vartheta(x)$ $\rightarrow E[\vartheta(x)] = aE[\vartheta(x)]$.
3. Sí $\vartheta(x) = a\vartheta_1(x) + b\vartheta_2(x)$ $\rightarrow E[\vartheta(x)] = aE[\vartheta_1(x)] + bE[\vartheta_2(x)]$

Momentos respecto al origen

Sí $\vartheta(x) = x^k$, donde $k = 1, 2, 3, 4$, se define el momento k -ésimo respecto al origen como:

$$M_o^k = E(x^k) = \int x^k f(x) dx \quad [91]$$

Para $k = 1$, se tiene el primer momento con respecto al origen:

$$M_o^1 = E(x^1) = \int x f(x) dx \quad [92]$$

Para $k = 2$, se tiene el segundo momento con respecto al origen:

$$M_o^2 = E(x^2) = \int x^2 f(x) dx \quad [93]$$

Para $k = 3$, se tiene el tercer momento con respecto al origen:

$$M_o^3 = E(x^3) = \int x^3 f(x) dx \quad [94]$$

Para $k = 4$, se tiene el cuarto momento con respecto al origen:

$$M_o^4 = E(x^4) = \int x^4 f(x) dx \quad [95]$$

Momento Central Respecto a la Media

Sí $\vartheta(x) = (x - \mu)^k$, donde $k = 1, 2, 3, 4$, se define el momento central k-ésimo respecto a la media como:

$$M_m^k = E[(x - \mu)^k] = \int (x - \mu)^k f(x) dx \quad [96]$$

Para $k = 1$, se tiene el primer momento central con respecto a la media:

$$M_m^1 = E[(x - \mu)^1] = \int (x - \mu) f(x) dx$$

$$M_m^1 = \int x f(x) dx - \mu \int f(x) dx$$

$$M_m^1 = M_o^1 - \mu(1)$$

$$M_m^1 = \mu - \mu = 0 \quad [97]$$

Para $k = 2$, se tiene el segundo momento central con respecto a la media:

$$M_m^2 = E[(x - \mu)^2] = \int (x - \mu)^2 f(x) dx \quad [98]$$

Para $k = 3$, se tiene el tercer momento central con respecto a la media:

$$M_m^3 = E[(x - \mu)^3] = \int (x - \mu)^3 f(x) dx \quad [99]$$

Para $k = 4$, se tiene el cuarto momento central con respecto a la media:

$$M_m^4 = E[(x - \mu)^4] = \int (x - \mu)^4 f(x) dx \quad [100]$$

Momentos centrales respecto a la media (M_m^k) expresados en términos de momentos con respecto al origen (M_o^k)

Segundo momento central con respecto a la media

$$M_m^2 = E[(x - \mu)^2]$$

$$\begin{aligned}
M_m^2 &= E[(x^2 - 2x\mu + \mu^2)] = E(x^2) - 2\mu E(x) + \mu^2 E(1) \quad \dots E(1) = 1 \\
M_m^2 &= E(x^2) - 2\mu E(x) + \mu^2 \quad \dots \mu = E(x) \\
M_m^2 &= E(x^2) - 2E(x)^2 + E(x)^2 \\
M_m^2 &= E(x^2) - E(x)^2 \\
M_m^2 &= M_o^2 - (M_o^1)^2 \tag{101}
\end{aligned}$$

Tercer momento central con respecto a la media

$$\begin{aligned}
M_m^3 &= E[(x - \mu)^3] \\
M_m^3 &= E[(x^3 - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3)] \\
M_m^3 &= E(x^3) - 3\mu E(x^2) + 3\mu^2 E(x) - \mu^3 E(1) \quad \dots E(1) = 1 \\
M_m^3 &= E(x^3) - 3\mu E(x^2) + 3\mu^2 E(x) - \mu^3 \quad \dots \mu = E(x) \\
M_m^3 &= E(x^3) - 3E(x)E(x^2) + 3E(x)^2 E(x) - E(x)^3 \\
M_m^3 &= E(x^3) - 3E(x)E(x^2) + 3E(x)^3 - E(x)^3 \\
M_m^3 &= E(x^3) - 3E(x)E(x^2) + 2E(x)^3 \\
M_m^3 &= M_o^3 - 3M_o^2 M_o^1 + 2(M_o^1)^3 \tag{102}
\end{aligned}$$

Cuarto momento central con respecto a la media

$$\begin{aligned}
M_m^4 &= E[(x - \mu)^4] \\
M_m^4 &= E[(x^4 - 4x^3\mu + 6x^2\mu^2 - 4x\mu^3 + \mu^4)] \\
M_m^4 &= E(x^4) - 4\mu E(x^3) + 6\mu^2 E(x^2) - 4\mu^3 E(x) + \mu^4 E(1) \quad \dots E(1) = 1 \\
M_m^4 &= E(x^4) - 4\mu E(x^3) + 6\mu^2 E(x^2) - 4\mu^3 E(x) + \mu^4 \quad \dots E(x) = \mu \\
M_m^4 &= E(x^4) - 4E(x) E(x^3) + 6E(x)^2 E(x^2) - 4E(x)^3 E(x) + E(x)^4 \\
M_m^4 &= E(x^4) - 4E(x) E(x^3) + 6E(x)^2 E(x^2) - 3E(x)^4 \\
M_m^4 &= M_o^4 - 4M_o^3 M_o^1 + 6M_o^2 (M_o^1)^2 - 3(M_o^1)^4 \tag{103}
\end{aligned}$$

Es conveniente recordar que en el caso de una distribución simétrica como la normal, el coeficiente de asimetría es cero. Las distribuciones con coeficientes de asimetría positivo están sesgadas hacia la derecha (cola larga hacia la derecha), mientras que las que tiene coeficientes de asimetría negativo están sesgadas hacia la izquierda (cola larga hacia la izquierda). Además, la distribución normal tiene un coeficiente de Curtosis igual a 3 y se llama mesocúrtica, las distribuciones con Curtosis mayor de 3 se llaman leptocúrticas (picudas), y las que tienen Curtosis menor a 3 se llaman platicúrticas (achatadas).

En este método tradicional la dispersión de los datos se calcula con respecto a un valor central. Es decir, se calculan las diferencias de cada uno de los datos con respecto a la media, elevándose luego estas diferencias a una potencia según el parámetro por calcular, por ejemplo, para el cálculo de la varianza la potencia es 2, para el coeficiente de asimetría la potencia es 3, para el coeficiente de Curtosis la potencia es 4. En consecuencia los parámetros así calculados son muy sensibles a los valores extremos, puesto que si la diferencia de alguno o algunos de los datos con respecto a la media es muy grande, al elevar esa diferencia a una potencia se obtienen valores enormes, lo cual afecta los resultados del cálculo de los parámetros estadísticos, puesto que los parámetros estadísticos citados constituyen la base para la determinación de las distribuciones teóricas de probabilidad que mejor se ajustan al comportamiento de los datos, también se ve afectada la escogencia de una distribución de probabilidad apropiada. En ocasiones un solo valor extremo muy diferente de la media, impide determinar cuál es la distribución teórica de probabilidad que mejor se ajusta a los datos analizados.

Por el método de momentos lineales, método que se verá a continuación, los parámetros estadísticos no se calculan con respecto a un valor central, sino que se calculan de las diferencias de todos los datos entre sí, considerando todas las posibles combinaciones. Además, las diferencias no se elevan a ninguna potencia, se mantienen lineales, por lo cual los estimados por este método son menos sensibles a los valores extremos.

Cuadro 7. Parámetros de las Distribuciones de Probabilidad.

Fuente: Adaptado de Ven Te Chow (1994) y Hosking (1895).

Distribución	Función de Densidad de Probabilidad	Rango	Ecuaciones de los parámetros en términos de los momentos de la muestra
<i>Sistema de Distribuciones de Probabilidad Pearson</i>			
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$-\infty \leq x \leq \infty$	$\mu = \bar{x} \quad \sigma = S$
Exponencial	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$x \geq 0$	$\lambda = \frac{1}{\bar{x}}$
Gamma	$f(x) = \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda x}$	$x \geq 0$	$\lambda = \frac{\bar{x}}{Sx^2} \quad \alpha = \frac{\bar{x}^2}{Sx^2} = \frac{1}{CV^2}$
Pearson tipo III	$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (x - \epsilon)^{\alpha-1} e^{-\lambda(x-\epsilon)}$	$x \geq \epsilon$	$\alpha = \frac{4}{CA^2} \quad \lambda = \frac{\sqrt{\alpha}}{Sx} \quad \epsilon = \bar{x} - Sx\sqrt{\alpha}$
<i>Sistema de Distribuciones del Valor Extremo Generalizada</i>			
Gumbel	$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} - e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$\xi = 0$ $-\infty \leq x \leq \infty$	$\bar{x} = \mu + \sigma\gamma \quad \sigma = \frac{\sqrt{6}}{\pi} Sx$
Valor Extremo Generalizado	$f(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)} e^{-\left(1+\xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\xi}}}$	$\xi \neq 0$ $x > \mu + \frac{\sigma}{\xi}$	$b_0 = \frac{\sum x_j}{n} \quad b_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(j-1)(j-2) \dots (j-r)}{(n-1)(n-2) \dots (n-r)} x_j$ $\frac{3b_2 - b_0}{2b_1 - b_0} = \frac{1 - 3^{-\xi}}{1 - 2^{-\xi}} \quad \sigma = \frac{\xi(2b_1 - b_0)}{\Gamma(1+\xi)(1-2^{-\xi})} \quad \mu = b_0 - \frac{\sigma}{\xi} (1 - \Gamma(1+\xi))$

Métodos de Momentos Lineales

Los momentos lineales (L-Moments) constituyen una metodología moderna, para estimar los parámetros estadísticos de una población o una muestra. Son similares a los momentos ordinarios pues proporcionan las medidas de localización, dispersión, asimetría y achatamiento, pero se calculan de las combinaciones lineales de los datos (de aquí el nombre de momentos lineales). Los parámetros estadísticos estimados con esta metodología, son menos sensibles a los valores extremos, por lo que permite determinar la distribución de probabilidad que mejor se ajusta a los datos analizados.

Jonathan R. M. Hosking desarrolló la teoría de los momentos lineales basada en el ordenamiento estadístico, a diferencia de los cálculos indirectos usando la probabilidad de los momentos pesados, Hosking definió los cuatro primeros momentos lineales de la siguiente manera (HOSKING. 1990):

Para $k = 1$, se tiene el primer momento lineal (media).

$$ML^1 = E[X_{1:1}]$$
$$ML^1 = \frac{1}{C_1^n} \sum_i^n (X_{1:1}) \quad [104]$$

Para $k = 2$, se tiene el segundo momento lineal (desviación estándar).

$$ML^2 = \frac{1}{2} E[X_{2:2} - X_{1:2}]$$
$$ML^2 = \frac{1}{2C_2^n} \sum_i^n (X_{2:2} - X_{1:2}) \quad [105]$$

Para $k = 3$, se tiene el tercer momento lineal.

$$ML^3 = \frac{1}{3} E[X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3}]$$
$$ML^3 = \frac{1}{3C_3^n} \sum_i^n (X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3}) \quad [106]$$

Para $k = 4$, se tiene el cuarto momento lineal.

$$ML^4 = \frac{1}{4} E[X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4}]$$
$$ML^4 = \frac{1}{4C_4^n} \sum_i^n (X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4}) \quad [107]$$

Donde:

ML^k : es el momento lineal de orden k .

$X_{j:m}$: es la j -ésimo columna del grupo m , para j desde 1 hasta m .

$E[x]$: es el valor esperado de x .

n : Número de elementos.

Combinaciones de n elementos en grupo de m en m :

$$C_m^n = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad [108]$$

El primer momento lineal ML^1 representa la media aritmética de la muestra, es una medida de la localización y su valor es el mismo que el calculado por el método tradicional. El segundo momento lineal ML^2 es equivalente a la desviación estándar, pero calculada mediante las diferencias de todos los datos entre sí, mas no con respecto a un valor central.

Para el coeficiente lineal de variación tenemos.

$$CLv = \frac{ML^2}{ML^1} \quad [109]$$

Para el coeficiente lineal de asimetría tenemos.

$$CLa = \frac{ML^3}{ML^2} \quad [110]$$

Para el coeficiente lineal de Curtosis tenemos.

$$CLk = \frac{ML^4}{ML^2} \quad [111]$$

Las ventajas de los L-momentos sobre los momentos ordinarios han sido subrayadas por varios autores. Fundamentalmente, los L-momentos no se ven tan afectados por la existencia de elementos extremos en la muestra como los momentos ordinarios, por lo que son mucho más fiables.

Los L-momentos son descriptores idóneos de la forma de una distribución, por lo que pueden utilizarse de diversas maneras para seleccionar la mejor distribución para los datos. Ello suele hacerse mediante las gráficas de L-momentos, en las que se comparan los L-coeficientes de sesgo y Curtosis de las estaciones con los correspondientes a las distribuciones de probabilidad consideradas (VOGEL, FENNESSEY. 1993).

Prueba de Bondad o de Ajuste

Las pruebas de bondad o de ajuste, consiste en comprobar gráfica y estadísticamente, si la frecuencia empírica de la serie analizada, se ajusta a una determinada función de probabilidad teórica seleccionada a priori, con los parámetros estimados con base en los valores muestrales.

Las pruebas de bondad del ajuste estadístico más utilizadas son:

- ❖ Chi - Cuadrado.
- ❖ Smirnov kolmogorov.

Debido a que el ajuste Chi – Cuadrado requiere de un conocimiento a priori de la función de distribución teórica, y es aplicable sólo a la distribución normal, utilizaremos el ajuste de Smirnov kolmogorov debido a las ventajas que ofrece este tipo de ajuste.

Prueba de Smirnov kolmogorov

La prueba de ajuste de Smirnov kolmogorov, consiste en comparar las diferencias existentes, entre la probabilidad acumulada de excedencia empírica de los datos de la muestra y la probabilidad acumulada de excedencia teórica, tomando el valor máximo del valor absoluto, de la diferencia entre el valor observado y el valor teórico del modelo, es decir:

$$\Delta = |Pee(x) - Pet(x)| \quad [112]$$

Donde:

Δ : Estadístico de Smirnov kolmogorov.

$F(x)$: Función de densidad de probabilidad acumulada teórica.

$Pet(x) = 1 - F(x)$: Probabilidad acumulada de excedencia teórica.

$Pee(x)$: Probabilidad acumulada de excedencia empírica.

El estadístico de Smirnov kolmogorov " Δ " tiene su función de distribución de probabilidades.

$$P[\text{máx}|Pee - Pet| \geq \Delta_0] = \alpha$$

$$P[\Delta_{\text{máx}} \geq \Delta_0] = \alpha \quad [113]$$

También podemos decir:

$$1 - P[\Delta < \Delta_0] = \alpha$$

$$P[\Delta < \Delta_0] = 1 - \alpha \quad [114]$$

La prueba de Kolmogorov no requiere de un conocimiento a priori de la función de distribución teórica, es aplicable a distribuciones de datos no agrupado y es aplicable a cualquier distribución teórica.

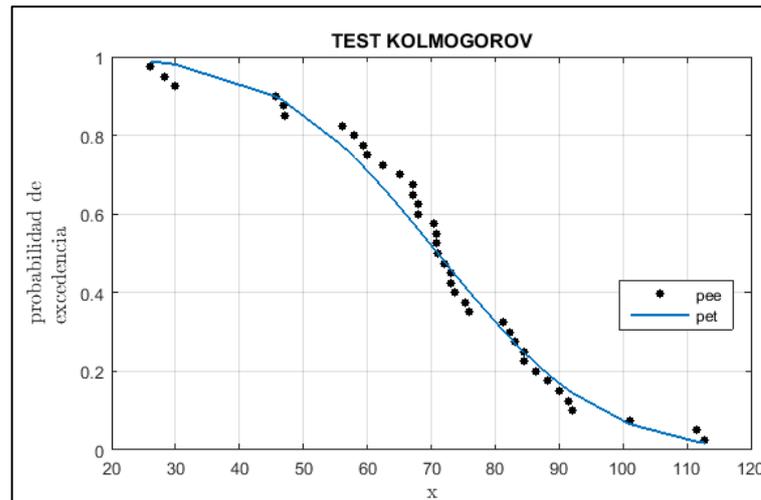


Figura 15. Prueba de ajuste de Smirnov Kolmogorov.

Fuente: Elaboración propia.

Tratado Matemático de las Intensidades Máximas de Lluvia

Ajuste de Curvas con funciones Lineales

Criterio para la regresión por mínimos cuadrados

Este criterio consiste en minimizar la suma de los cuadrados de los residuos entre la variable observada “ y_{obs} ” y la variable modelada con el modelo lineal “ y_{mod} ” (Chapra y Canale, 2006).

$$S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_{i, observado} - y_{i, modelo})^2$$

$$S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2 \quad [115]$$

Teorema de la primera derivada para extremos relativos

Sea f una función continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) que contiene al número c , y suponga que $f'(x)$ existe en todos los puntos de (a, b) excepto posiblemente en c (LEITHOLD. 1996).

- i. Sí $f'(x) > 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo derecho, y sí $f'(x) < 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo izquierdo, entonces f tiene un valor máximo relativo en c .

- ii. Sí $f'(x) < 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo derecho, y sí $f'(x) > 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo izquierdo, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c .

Sea $S_r = f(a_0, a_1)$ entonces:

$$\begin{aligned}
 S_r &= \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2 \\
 S_r &= \sum_{i=1}^n [(y_i^2 - 2y_i(a_0 + a_1 x_i) + (a_0 + a_1 x_i)^2)] \\
 S_r &= \sum_{i=1}^n [(y_i^2 - 2y_i(a_0 + a_1 x_i) + a_0^2 + 2a_0 a_1 x_i + a_1^2 x_i^2)] \\
 S_r &= \sum_{i=1}^n [y_i^2 - 2a_0 y_i - 2a_1 y_i x_i + a_0^2 + 2a_0 a_1 x_i + a_1^2 x_i^2] \\
 S_r &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2a_0 \sum_{i=1}^n y_i - 2a_1 \sum_{i=1}^n y_i x_i + a_0^2 \sum_{i=1}^n 1 + 2a_0 a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_1^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
 S_r &= \Sigma y_i^2 - 2a_0 \Sigma y_i - 2a_1 \Sigma y_i x_i + a_0^2 n + 2a_0 a_1 \Sigma x_i + a_1^2 \Sigma x_i^2 \\
 S_r &= (\Sigma y_i^2) - a_0(2\Sigma y_i) - a_1(2\Sigma y_i x_i) + a_0^2(n) + a_0 a_1(2\Sigma x_i) + a_1^2(\Sigma x_i^2) \quad [116]
 \end{aligned}$$

Graficamos:

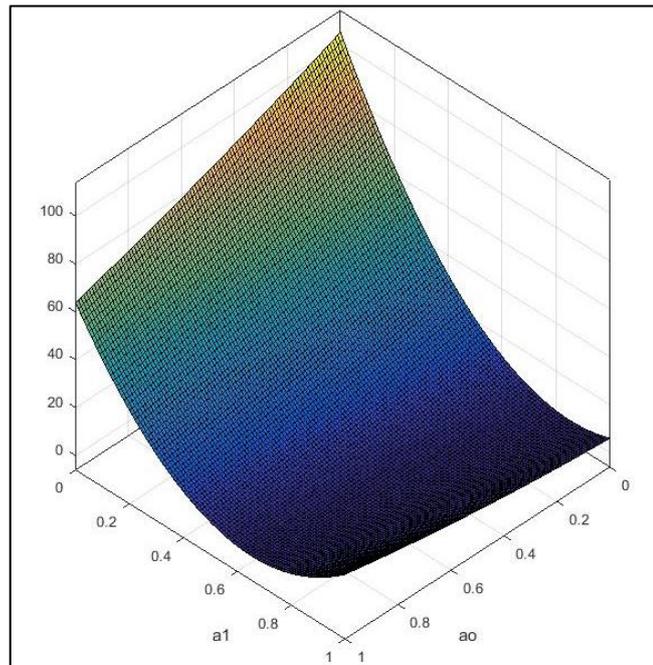


Figura 16. Superficie generada por la variación de los coeficientes a_0 y a_1 .

Fuente: Elaboración propia.

Para encontrar el mínimo valor de la función Sr en el intervalo (a, b) se aplica el criterio de la primera derivada.

Derivamos Sr respecto de a_0

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_0} = -2\sum y_i + 2a_0n + 2a_1\sum x_i = 2(-\sum y_i + a_0n + a_1\sum x_i)$$

$$0 = 2(-\sum y_i + a_0n + a_1\sum x_i)$$

$$\sum y_i = a_0n + a_1\sum x_i \quad [117]$$

Derivamos Sr respecto de a_1

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_1} = -2\sum y_i x_i + 2a_0\sum x_i + 2a_1\sum x_i^2$$

$$0 = 2(-\sum y_i x_i + a_0\sum x_i + a_1\sum x_i^2)$$

$$\sum y_i x_i = a_0\sum x_i + a_1\sum x_i^2 \quad [118]$$

Nos quedan dos ecuaciones

$$\sum y_i = a_0n + a_1\sum x_i$$

$$\sum y_i x_i = a_0\sum x_i + a_1\sum x_i^2$$

Las cuales se pueden resolver matricialmente, para determinar los valores óptimos de a_0 y a_1 .

Formulación General de una matriz para mínimos cuadrados

Modelos lineales

La regresión lineal simple, lineal múltiple y polinomial, pertenecen al siguiente modelo lineal general de mínimos cuadrados (CHAPRA. 2006):

$$y = a_0z_0 + a_1z_1 + a_2z_2 + \dots + a_mz_m + e \quad [119]$$

Donde $z_0, z_1, z_2, \dots, z_m$ son $m + 1$ funciones diferentes. Se observa con facilidad cómo la regresión lineal simple y múltiple, se encuentran dentro de este modelo; es decir $z_0 = 1, z_1 = x_1, z_2 = x_2, \dots, z_m = x_m$. Además, la regresión polinomial se incluye también si las z son monomios simples como $z_0 = x^0 = 1, z_1 = x^1 = x, z_2 = x^2, \dots, z_m = x^m$.

Observe que la terminología “lineal” se refiere sólo a la dependencia del modelo sobre sus parámetros (es decir, las a). Como en el caso de la regresión polinomial, las mismas funciones llegan a ser altamente no lineales. Por ejemplo, las z pueden ser senoidales, como en:

$$y = a_0 + a_1\cos(\omega t) + a_2\sin(\omega t) \quad [120]$$

Esta forma es la base del análisis de Fourier que se describe más adelante en el ajuste a funciones sinusoidales. Por otro lado, un modelo de apariencia simple como:

$f(x) = a_0(1 - e^{-a_1x})$, es no lineal porque no es posible llevarlo a la forma de la ecuación [1], este tipo de ecuaciones se verá en modelos no lineales.

Mientras tanto, la ecuación [1], se expresa en notación matricial como:

$$\{Y\} = [Z]\{A\} + \{E\} \quad [121]$$

Donde $[Z]$ es una matriz de los valores calculados de las funciones z en los valores medidos de las variables independientes,

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{01} & Z_{11} & \dots & Z_{m1} \\ Z_{02} & Z_{12} & \dots & Z_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{0n} & Z_{1n} & \dots & Z_{mn} \end{bmatrix}$$

Donde m es el número de variables en el modelo y n es el número de datos.

Como $n \geq m + 1$, la mayoría de las veces, $[Z]$ no es una matriz cuadrada.

El vector columna $\{Y\}$ contiene los valores observados de la variable dependiente

$$\{Y\} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]$$

El vector columna $\{A\}$ contiene los coeficientes desconocidos

$$\{A\}^T = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_m]$$

Y el vector columna $\{E\}$ contiene los residuos

$$\{E\}^T = [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n]$$

La suma de los cuadrados de los residuos en este modelo se define como:

$$S_r = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j z_{ji} \right)^2 \quad [122]$$

Esta cantidad se minimiza tomando las derivadas parciales con respecto a cada uno de los coeficientes e igualando a cero la ecuación resultante. El resultado de este proceso son las ecuaciones normales, que se expresan en forma matricial como

$$[[Z]^T [Z]]\{A\} = \{[Z]^T \{Y\}\} \quad [123]$$

Modelos no Lineales

Hay muchos casos en la ingeniería donde los modelos no lineales deben ajustarse a datos, como en el caso de las ecuaciones IDT (Intensidad, Duración y Periodo de retorno). En

el presente contexto, tales modelos se definen como aquellos que tienen dependencia no lineal de sus parámetros. Por ejemplo.

$$f(x) = a_0(1 - e^{-a_1x}) + e \quad [124]$$

Estas ecuaciones no pueden ser manipuladas, para ser llevadas a la forma general de la ecuación [124]. Como en el caso de los mínimos cuadrados lineales, la regresión no lineal se basa en la determinación de los valores de los parámetros que minimizan la suma de los cuadrados de los residuos. Sin embargo, en el caso no lineal, la solución debe realizarse en una forma iterativa (CHAPRA. 2006).

El método de Gauss-Newton es un algoritmo para minimizar la suma de los cuadrados de los residuos entre los datos y las ecuaciones no lineales. El concepto clave detrás de esta técnica es que se utiliza una expansión en serie de Taylor para expresar la ecuación no lineal original en una forma lineal aproximada. Entonces, es posible aplicar la teoría de mínimos cuadrados para obtener nuevas estimaciones de los parámetros que se mueven en la dirección que minimiza el residuo.

Para ilustrar cómo se logra esto, primero se expresa de manera general la relación entre la ecuación no lineal y los datos, de la manera siguiente:

$$y_i = f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_m) + e_i \quad [125]$$

Donde y_i = un valor medido de la variable dependiente, $f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_m)$ = la ecuación que es una función de la variable independiente x_i y una función no lineal de los parámetros a_0, a_1, \dots, a_m , y e_i = un error aleatorio. Por conveniencia este modelo se expresa en forma abreviada al omitir los parámetros,

$$y_i = f(x_i) + e_i \quad [126]$$

El modelo no lineal puede expandirse en una serie de Taylor alrededor de los valores de los parámetros y cortarse después de las primeras derivadas. Por ejemplo, para un caso con dos parámetros,

$$f(x_i)_{j+1} = f(x_i)_j + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_0} \Delta a_0 + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_1} \Delta a_1 \quad [127]$$

Donde j = el valor inicial, $j + 1$ = la predicción $\Delta a_0 = a_{0,j+1} - a_{0,j}$, y $\Delta a_1 = a_{1,j+1} - a_{1,j}$. De esta forma, hemos linealizado el modelo original con respecto a los parámetros.

La ecuación [127] se sustituye en la ecuación [126] para dar

$$y_i - f(x_i)_j = \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_0} \Delta a_0 + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_1} \Delta a_1 + e_i \quad [128]$$

O en forma matricial:

$$\{D\} = [Z_j]\{\Delta A\} + \{E\} \quad [129]$$

Donde $[Z_j]$ es la matriz de las derivadas parciales de la función evaluadas en el valor inicial j ,

$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_0} & \frac{\partial f_1}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_0} & \frac{\partial f_2}{\partial a_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial a_0} & \frac{\partial f_n}{\partial a_1} \end{bmatrix}$$

Donde n = el número de datos y $\partial f_i / \partial a_k$ = la derivada parcial de la función con respecto al k -ésimo parámetro evaluado en el i -ésimo dato. El vector $\{D\}$ contiene las diferencias entre las mediciones y los valores de la función,

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} y_1 - f(x_1) \\ y_2 - f(x_2) \\ \vdots \\ y_n - f(x_n) \end{Bmatrix}$$

Y el vector $\{\Delta A\}$ contiene los cambios en los valores de los parámetros,

$$\{\Delta A\} = \begin{Bmatrix} \Delta a_0 \\ \Delta a_1 \\ \vdots \\ \Delta a_m \end{Bmatrix}$$

Si se aplica la teoría de los mínimos cuadrados lineales a la ecuación [129] se obtienen las siguientes ecuaciones normales:

$$[[Z_j]^T [Z_j]] \{\Delta A\} = \{[Z_j]^T \{D\}\} \Delta \quad [130]$$

Así, el procedimiento consiste en resolver de la ecuación [130] para $\{\Delta A\}$, que se utiliza para calcular valores mejorados de los parámetros, como en

$$a_{0,j+1} = a_{0,j} + \Delta a_0$$

Y

$$a_{1,j+1} = a_{1,j} + \Delta a_1$$

Este procedimiento se repite hasta que la solución converge, es decir, hasta que

$$|\varepsilon_a|_k = \left| \frac{a_{k,j+1} - a_{k,j}}{a_{k,j+1}} \right| 100\% \quad [131]$$

Está por debajo de un criterio de terminación aceptable.

Un problema potencial con el método de Gauss-Newton, como se ha desarrollado hasta ahora, es que las derivadas parciales de la función pueden ser difíciles de evaluar. En consecuencia, muchos programas computacionales usan diferentes ecuaciones para aproximar las derivadas parciales. Un método es

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_k} \cong \frac{f(x_i; a_0, \dots, a_k + \delta a_k, \dots, a_m) - f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_m)}{\delta a_k} \quad [132]$$

Donde δ = perturbación fraccional pequeña. El método de Gauss-Newton tiene también algunas desventajas:

1. Puede converger con lentitud.
2. Puede oscilar ampliamente; es decir, cambia de dirección continuamente.
3. Puede no converger.

Se han desarrollado modificaciones del método (BOOTH, PETERSON. 1958; HARTLEY. 1961) para disminuir las desventajas.

Además, aunque hay varios procedimientos expresamente diseñados para regresión, un método más general es usar rutinas de optimización no lineal, para hacer esto, se dan valores iniciales a los parámetros y se calcula la suma de los cuadrados de los residuos.

Por ejemplo, para la ecuación:

$$f(x) = a_0(1 - e^{-a_1x}) + e \quad [133]$$

Esto se podría calcular como

$$Sr = \sum_{i=1}^n [y_i - a_0(1 - e^{-a_1x_i})]^2 \quad [134]$$

Los parámetros, entonces, se ajustarían de manera sistemática para minimizar Sr mediante técnicas de búsqueda (CHAPRA. 2006).

Función Generalizada de las Curvas IDT

En este estudio se presentan algunos modelos matemáticos no lineales, para estimar las curvas de intensidad, duración y período de retorno (IDT), los cuales se ajustarán a registros pluviográficos de la ciudad de Cajamarca, Perú. Se utilizarán datos de precipitación de las tormentas más críticas de cada año, registradas en la estación meteorológica Weberbauer (1973-2011), conocida la intensidad de la lluvia, i , para la duración, d , y el período de retorno correspondiente, T , se resolverán las ecuaciones de cada modelo utilizando el método de aproximaciones sucesivas de Quasi-Newton, en el módulo de estimación no lineal del software Matlab.

Modelos Matemáticos Para Las Curvas IDT

Las curvas de intensidad, duración y período de retorno también pueden expresarse como ecuaciones, con el fin de evitar la lectura de la intensidad de la lluvia de diseño, en una gráfica (Chow, 1994). A continuación, se presentan los modelos matemáticos más conocidos, a nivel mundial, que se utilizan para estimar las curvas IDT (GEOS, 2004 Vol. 24, No. 1, p. 46-56).

- 1. Modelo propuesto por Bernard (1932).** Este modelo relaciona simultáneamente la intensidad, la duración y el período de retorno de la lluvia en una familia de curvas.

$$I = \frac{\lambda T^\psi}{d^\eta} \quad [135]$$

- 2. Modelo propuesto por Sherman (1931)** para la ciudad de Boston, Massachussets, USA (RAUDKIVI. 1979).

$$I = \frac{\lambda T^\psi}{(d + \theta)^\eta} \quad [136]$$

- 3. Modelo propuesto por Wenzel (1982).** Wenzel propuso y estimó los coeficientes λ , η , y θ para algunas ciudades de los Estados Unidos:

$$I = \frac{\lambda}{d^\eta + \theta} \quad [137]$$

- 4. Modelo propuesto por Chow (1994),** que consiste en incluir el período de retorno T a la ecuación propuesta por Wenzel (1982)

$$I = \frac{\lambda T^\psi}{d^\eta + \theta} \quad [138]$$

- 5. Modelo propuesto por Koutsoyiannis (1998).** Este modelo fue ajustado para Atenas, Grecia, y considera que la variable intensidad I , tiene una distribución doble exponencial o Gumbel, con el parámetro adimensional ψ constante e independiente de la duración, y el parámetro de escala varía con la duración d , como $1/(d + \theta)^\eta$.

$$I = \frac{\lambda\psi - \lambda \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right]}{(d + \theta)^\eta} \quad [139]$$

Donde I es la intensidad de la lluvia en mm/h, T es el período de retorno en años, d es la duración de la tormenta en horas y λ , ψ , η y θ son parámetros que varían con el lugar y el período de retorno, cuyos valores se estiman por aproximaciones sucesivas cuando se ajusta cada modelo.

- 6. Modelo propuesto por Jhowen (2017).** Este modelo surge en primera instancia como una aproximación a la función de densidad de probabilidad normal, y fue ajustado a las intensidades máximas de lluvia en Perú.

$$I = \frac{\varphi + \beta \tan \left(\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{1}{T} \right) - \frac{\pi}{2\xi} \right)}{(d + \theta)^\eta} \quad [140]$$

Donde I es la intensidad de la lluvia en mm/h, T es el período de retorno en años, d es la duración de la tormenta en horas y φ , β , θ , η son parámetros que varían con el lugar y el período de retorno cuyos valores se estiman por aproximaciones sucesivas, cuando se ajusta cada modelo. Y ξ es un parámetro de ajuste igual a 1.25.

Ajuste de curvas con funciones sinusoidales

Aproximación de Fourier

Ahora veremos otra clase de funciones que son trascendentales en la ingeniería. Éstas son las funciones trigonométricas $1, \cos(x), \cos(2x), \dots, \cos(nx), \sin(x), \sin(2x), \dots, \sin(nx)$ (Figura 17). Los ingenieros a menudo tratan con sistemas que oscilan o vibran. Como es de esperarse, las funciones trigonométricas juegan un papel importante en el modelado de tales problemas. La aproximación de Fourier representa un esquema sistemático para utilizar series trigonométricas con este propósito. Una de las características distintivas del análisis de Fourier es que trata con los dominios del tiempo y de la frecuencia. Como algunos ingenieros requieren trabajar con el último, se ha dedicado gran parte del siguiente material a ofrecer una visión general de la aproximación de Fourier. Un aspecto clave de esta visión será familiarizarse con el dominio de la frecuencia (CHAPRA. 2006).

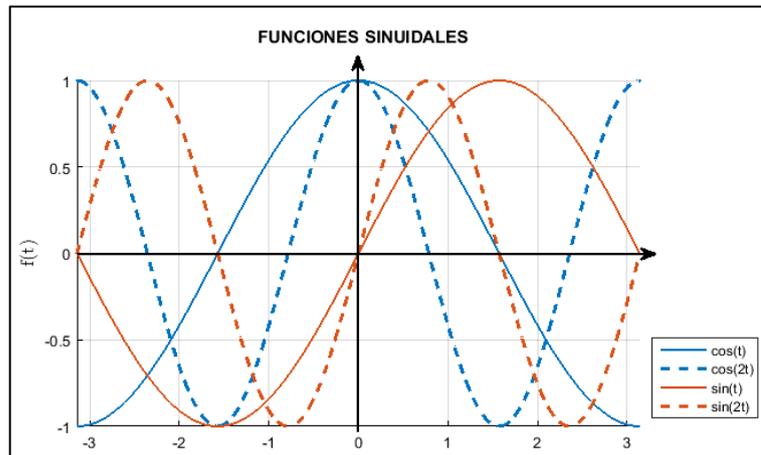


Figura 17. Funciones trigonométricas.

Fuente: Métodos Numéricos para Ingenieros, Steven C. Chapra (2006).

Una función periódica $f(t)$ es aquella para la cual:

$$f(t) = f(t + T) \quad [141]$$

Donde T es una constante llamada el periodo, que es el valor menor para el cual es válida la ecuación [141]. Entre los ejemplos comunes se encuentran diversas formas de onda tales como, ondas cuadradas y dientes de sierra (Figura 18). Las ondas fundamentales son las funciones sinusoidales.

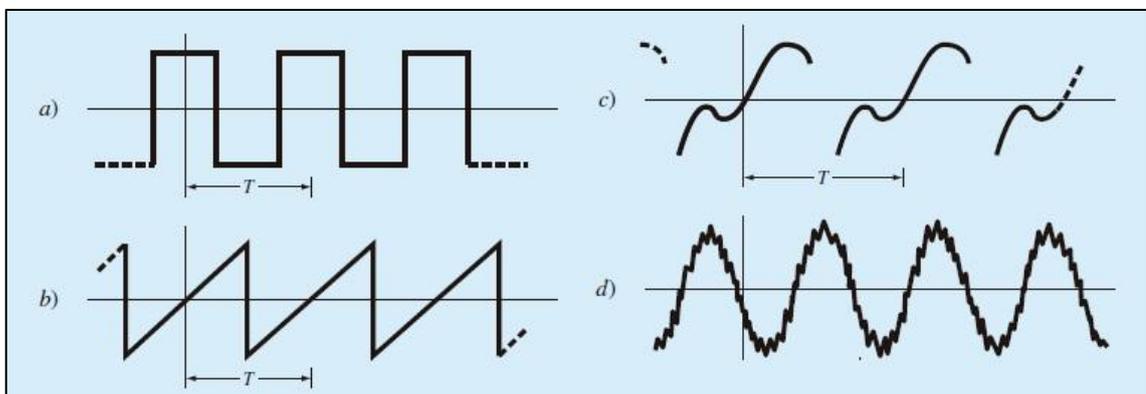


Figura 18. Además de las funciones trigonométricas seno y coseno, las funciones periódicas comprenden formas de onda como a) la onda cuadrada y b) la onda dientes de sierra. Más allá de estas formas idealizadas, las señales periódicas en la naturaleza pueden ser c) no ideales y d) contaminadas por ruido. Las funciones trigonométricas sirven para representar y analizar todos estos casos.

Fuente: Métodos Numéricos para Ingenieros, Steven C. Chapra (2006).

En el presente análisis se usará el término senoide para representar cualquier forma de onda que se pueda describir como un seno o un coseno. No existe una convención muy clara para elegir entre estas funciones y, en cualquier caso, los resultados serán idénticos.

En el presente trabajo se usará el coseno, que generalmente se expresa como:

$$f(t) = A_0 + C_1 \cos(\omega_0 t + \theta) \quad [142]$$

Así, cuatro parámetros sirven para caracterizar la senoide (Figura 19). El valor medio A_0 , establece la altura promedio sobre las abscisas. La amplitud C_1 especifica la altura de la oscilación. La frecuencia angular ω_0 caracteriza con qué frecuencia se presentan los ciclos.

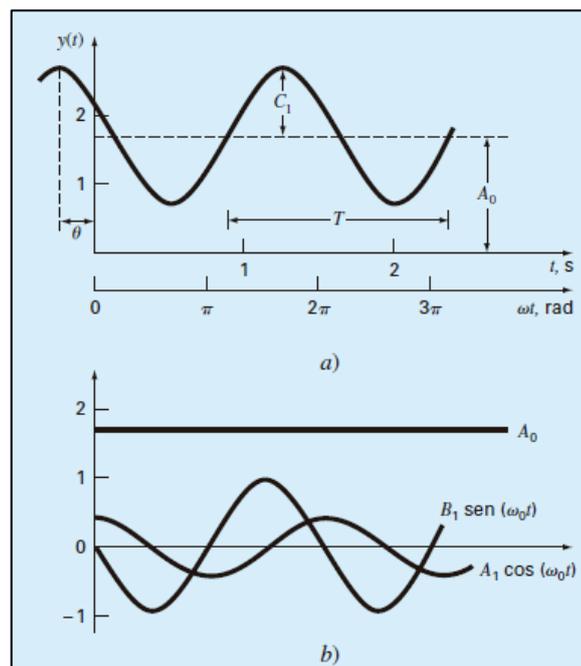


Figura 19. a) Una gráfica de la función sinusoidal $y(t) = A_0 + C_1 \cos(\omega_0 t + \theta)$. En este caso, $A_0 = 1.7$, $C_1 = 1$, $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/1.5$ y $\theta = \pi/3 \text{ rad} = 1.0472$. Otros parámetros que se utilizan para describir la curva son la frecuencia $f = \omega_0/(2\pi)$, que en este caso es 1 ciclo / (1.5 s), y el periodo $T = 1.5$ s. b) Una expresión alternativa para la misma curva es $y(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t)$. Los tres componentes de esta función se ilustran en b), Donde $A_1 = 0.5$ y $B_1 = -0.866$. La suma de las tres curvas en b) da como resultado la curva simple en a).

Fuente: Métodos Numéricos para Ingenieros, Steven C. Chapra (2006).

Finalmente, el ángulo de fase, o corrimiento de fase θ , parametriza en qué extensión la senoide está corrida horizontalmente. Esto puede medirse como la distancia en radianes desde $t = 0$ hasta el punto donde la función coseno empieza un nuevo ciclo. Como se

ilustra en la Figura 20, un valor negativo se conoce como un ángulo de fase de atraso, ya que la curva $\cos(\omega t - \theta)$ comienza un nuevo ciclo de θ radianes después del $\cos(\omega t)$. Así, se dice que $\cos(\omega t - \theta)$ tiene un retraso $\cos(\omega t)$. En forma opuesta, como se muestra en la Figura 20, un valor positivo se refiere como un ángulo de fase de adelanto.

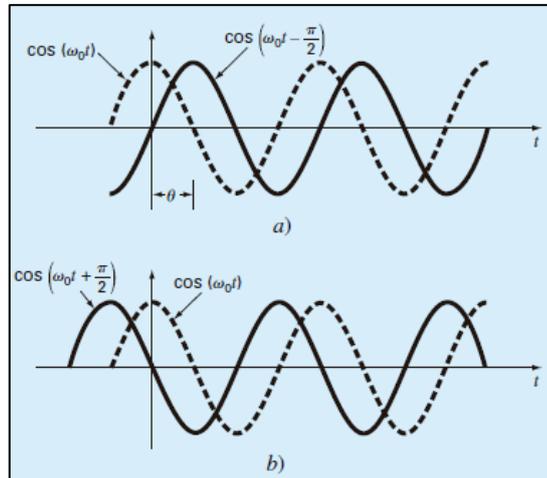


Figura 20. Representaciones gráficas de a) un ángulo de fase de atraso y b) un ángulo de fase de adelanto. Observe que la curva atrasada en a) puede describirse de manera alternativa como $\cos(\omega t + 3\pi/2)$. En otras palabras, si una curva se atrasa en un ángulo α , también se puede representar como adelanto en $2\pi - \alpha$.

Fuente: Métodos Numéricos para Ingenieros, Steven C. Chapra (2006).

Análisis Espectral

Precisamente la representación espectral de un proceso es una herramienta especialmente adecuada para sacar a la luz componentes periódicas, ya que consiste en expresar el proceso como una suma de sucesiones periódicas, concretamente trigonométricas. Esta representación, por tanto, nos permite centrar la atención en las frecuencias que más nos interesen. Hasta aquí, nuestro análisis de la aproximación de Fourier se ha limitado al dominio del tiempo. Esto se debe a que para la mayoría de nosotros resulta fácil conceptualizar el comportamiento de una función en esta dimensión. Aunque no sea muy familiar, el dominio de la frecuencia ofrece una perspectiva alternativa para caracterizar el comportamiento de funciones oscilantes. Así, justo como se grafica la amplitud contra el tiempo, de igual manera se grafica contra la frecuencia (CHAPRA. 2006).

Ambos tipos de expresión se ilustran en la figura 25a, donde se dibuja una gráfica en tres dimensiones de una función sinusoidal $f(t) = C_1 \cos(t + \pi/2)$.

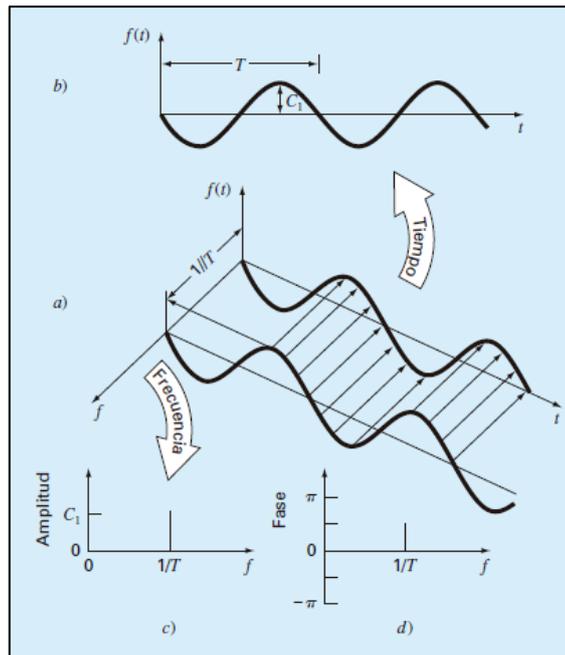


Figura 21. a) Una ilustración de cómo se representa una senoide en los dominios del tiempo y de la frecuencia. Se reproduce la proyección en el tiempo en b); mientras que la proyección de amplitud-frecuencia se reproduce en c). La proyección de fase-frecuencia se muestra en d).

Fuente: Métodos Numéricos para Ingenieros, Steven C. Chapra (2006).

En esta gráfica, la magnitud o la amplitud de la curva $f(t)$, es la variable dependiente; y las variables independientes son el tiempo t y la frecuencia $f = \omega_0/2\pi$. Así, los ejes de la amplitud y del tiempo forman un plano de tiempo; y los ejes amplitud y frecuencia, un plano de frecuencia. Por lo tanto, la senoide se concibe como si existiera a una distancia $1/T$ hacia afuera y a lo largo del eje de la frecuencia, y corriendo paralela a los ejes del tiempo. En consecuencia, cuando se habla acerca del comportamiento de la senoide en el dominio del tiempo, significa la proyección de la curva en el plano del tiempo (figura 25b). De manera similar, el comportamiento en el dominio de la frecuencia es tan sólo su proyección en el plano de la frecuencia.

Como se observa en la figura 25c, esta proyección es una medida de la amplitud positiva máxima de la senoide C_1 . La oscilación completa de pico a pico es innecesaria debido a la simetría. Junto con la ubicación $1/T$ a lo largo del eje de la frecuencia, la figura 25c define ahora la amplitud y frecuencia de la senoide. Esta información es suficiente para reproducir la forma y el tamaño de la curva en el dominio del tiempo. Sin embargo, se requiere un parámetro más, el ángulo de fase, para ubicar la curva en relación con $t = 0$.

En consecuencia, se debe incluir también un diagrama de fase, como el que se muestra en la figura 25d. El ángulo de fase se determina como la distancia (en radianes) desde cero al punto donde se presenta el pico positivo. Si el pico se presenta después del cero, se dice que está retrasada y, por convención, al ángulo de fase se le antepone signo negativo. En forma opuesta, con un pico antes de cero se dice que está adelantada y el ángulo de fase es positivo. Así, en la figura 25, el pico está antes del cero y el ángulo de fase se grafica como $+\pi/2$. En la figura 26 se ilustran otras posibilidades.

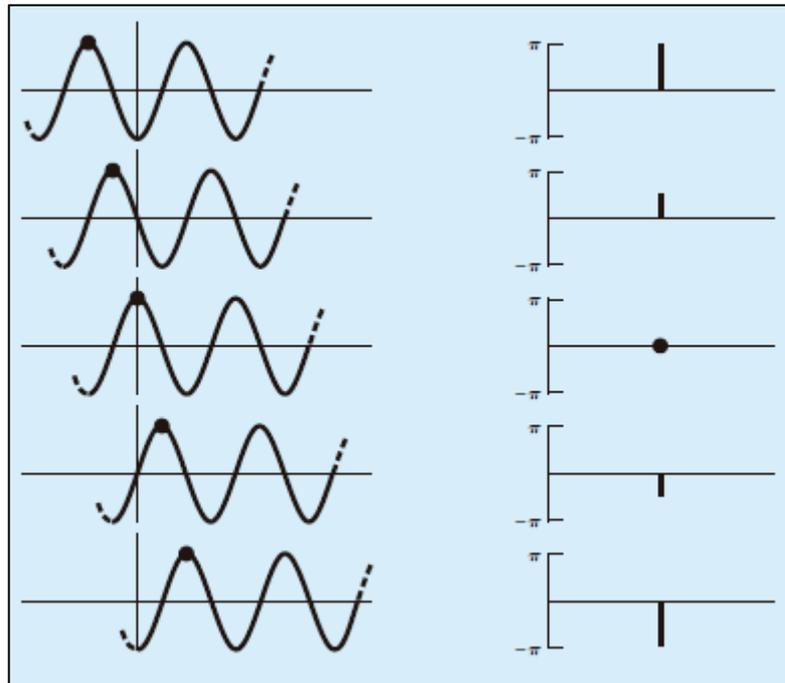


Figura 22. Varias fases de una senoide que muestran el espectro de fase correspondiente.

Fuente: Métodos Numéricos para Ingenieros, Steven C. Chapra (2006).

Se puede observar ahora que las figuras 25c y 25d proporcionan una forma alternativa de presentar o resumir las características de la senoide de la figura 25a. Se hace referencia a ellas como espectros de línea. Se acepta que para una sola senoide estas líneas no son muy interesantes. Sin embargo, cuando se aplican a una situación más complicada, digamos, una serie de Fourier, se revela su poder y su valor.

Funciones pares e impares

Propiedades especiales de $f(x)$:

Función par: f es una función par en $[-L, L]$, sí $f(-x) = f(x)$ para $-L \leq x \leq L$

Por ejemplo $|x|$, x^4 , $\cos(x)$, y $e^{-|x|}$ son funciones pares en cualquier intervalo $[-L, L]$, la gráfica de tales funciones para $-L \leq x \leq 0$ es la reflexión a lo largo del eje “y” de la gráfica para $0 \leq x \leq L$.

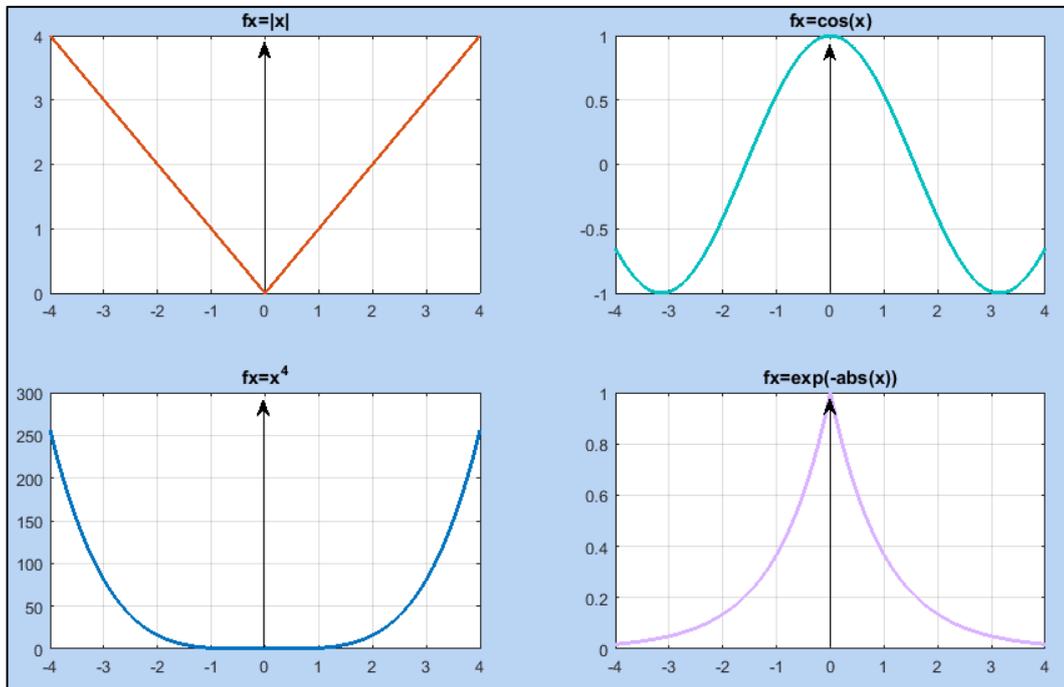


Figura 23. Gráfica de funciones pares.

Fuente: Matemáticas Avanzadas, Dennis G. Zill, Vol 2 (2006).

Función impar: f es una función impar en $[-L, L]$, si $f(-x) = -f(x)$ para $-L \leq x \leq L$. Por ejemplo x , x^3 , x^5 y $\sin(x)$ son funciones impares en cualquier intervalo $[-L, L]$, la gráfica de una función impar para $-L \leq x \leq 0$ es la reflexión a lo largo del eje vertical y después a lo largo del eje horizontal de la gráfica para $0 \leq x \leq L$. Si f es impar, entonces $f(0) = 0$, ya que: $f(-0) = f(0) = -f(0)$

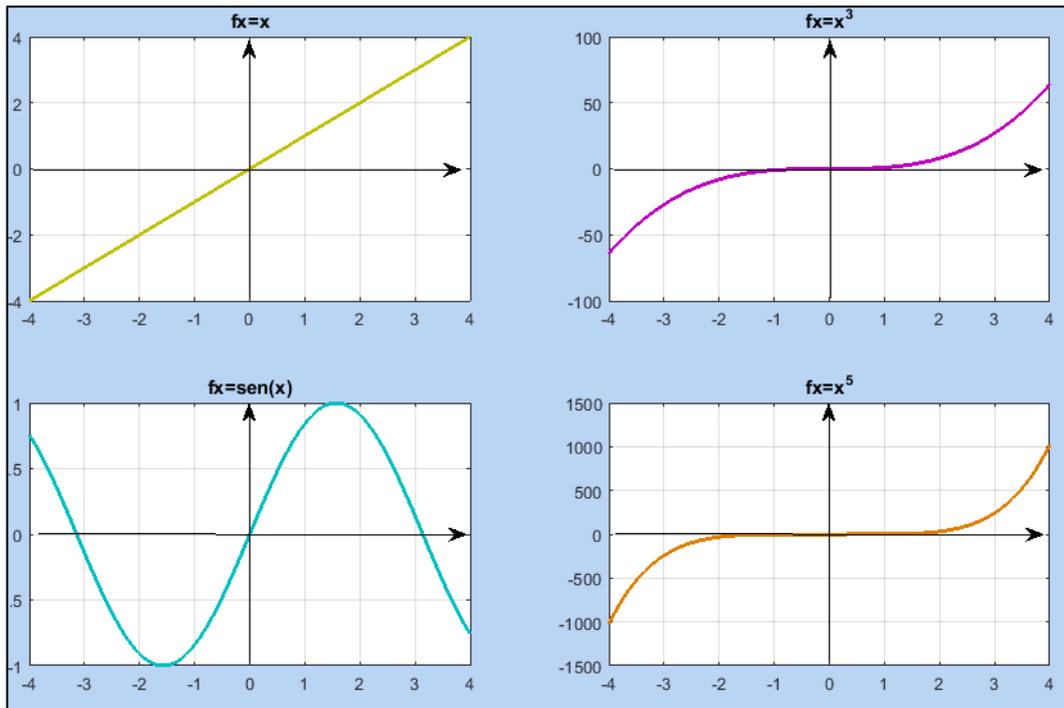


Figura 24. Gráfica de funciones impares.

Fuente: Matemáticas Avanzadas, Dennis G. Zill, Vol 2 (2006).

Por supuesto, la mayoría de las funciones no son par ni impar. Por ejemplo $f(x) = e^x$ no es ni par ni impar en ningún intervalo $[-L, L]$.

Las funciones pares e impares se comportan igual que los enteros pares e impares bajo la multiplicación:

$$\text{par} \cdot \text{par} = \text{par}$$

$$\text{impar} \cdot \text{impar} = \text{par}$$

$$\text{par} \cdot \text{impar} = \text{impar}$$

Por ejemplo $x^2 \cos(x)$ es una función par (producto de dos funciones pares); $x^2 \text{sen}(x)$ es impar (producto de una función par con una función impar); y $x^3 \text{sen}(x)$ es par (producto de dos funciones impares). Las integrales evaluadas en $[-L, L]$ para las funciones impares o pares respectivamente son (DENNIS G. ZILL. 2006).

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0 \quad \dots \text{sí } f \text{ es impar en } [-L, L] \quad [143]$$

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx \quad \dots \text{sí } f \text{ es par en } [-L, L] \quad [144]$$

Una ramificación de estas ideas que se verá más adelante es para el cálculo los coeficientes de Fourier, sí f es una función par o impar, entonces se puede ver

inmediatamente que algunos coeficientes de Fourier son cero y no necesita efectuar explícitamente la integración.

Series de Fourier

Una serie de Fourier es la representación de una función como una serie de constantes multiplicadas por funciones seno y/o coseno de diferentes frecuencias. Para una función $f(x)$ se escribe una serie de Fourier continua:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \dots$$

O de manera concisa, usando la notación de sumatoria.

$$S_{ffx} = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad [145]$$

Donde:

S_{ffx} : Desarrollo de la serie de Fourier para la función $f(x)$.

a_0, a_n, b_n : Coeficientes de la serie de Fourier.

$T = 2L$: Período.

$\omega_0 = 2\pi/T$, se denomina la frecuencia fundamental y sus múltiplos constantes $2\omega_0, 3\omega_0$, etcétera, se denominan armónicos. De esta forma, la ecuación [143] puede ser expresada como:

$$S_{ffx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) \right]$$

$$S_{ffx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x)] \quad [146]$$

La existencia de las series de Fourier está referida en las condiciones de Dirichlet, las cuales especifican que la función periódica tiene un número finito de máximos y mínimos, y que hay un número finito de saltos discontinuos. En general, todas las funciones periódicas obtenidas físicamente satisfacen tales condiciones. Los coeficientes de la ecuación [144] se calculan por medio de:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad [147]$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \dots \text{Para } n=0, 1, 2, \dots \quad [148]$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \dots \text{Para } n=1, 2, 3, \dots \quad [149]$$

Los fenómenos periódicos han fascinado por mucho tiempo a la humanidad. Nuestros ancestros conocían la recurrencia de las fases de la luna y de ciertos planetas, las mareas de los lagos y los océanos y los ciclos del agua. El cálculo y la ley de gravitación de Isaac Newton permitieron explicar la periodicidad de las mareas, pero fue Joseph Fourier y sus sucesores quienes desarrollaron el análisis de Fourier que ha tenido aplicaciones más profundas en el estudio de los fenómenos naturales y en el análisis de señales y datos.

Integral de Fourier

Aunque la serie de Fourier es una herramienta útil para investigar el espectro de una función periódica, existen muchas formas de onda que no se auto repiten de manera regular. Por ejemplo, un relámpago ocurre sólo una vez (o al menos pasará mucho tiempo para que ocurra de nuevo); pero causará interferencia en los receptores que están operando en un amplio rango de frecuencias (por ejemplo, en televisores, radios, receptores de onda corta, etcétera). Tal evidencia sugiere que una señal no recurrente como la producida por un relámpago exhibe un espectro de frecuencia continuo. Ya que fenómenos como éstos son de gran interés para los ingenieros, una alternativa a la serie de Fourier sería valiosa para analizar dichas formas de onda no periódicas. La integral de Fourier es la principal herramienta para este propósito (CHAPRA. 2006).

Ahora procederemos a deducir, aunque no rigurosamente, una forma para representar ciertos tipos de funciones no periódicas que estén definidas en un intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ o semiinfinito $(0, \infty)$.

De la serie de Fourier a la integral de Fourier

Suponga que una función f está definida en $(-L, L)$, entonces la serie de Fourier Ec. [145] de f en el intervalo es (DENNIS G. ZILL. 2006).

$$\begin{aligned}
 S_{ffx} = & \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L f(t) dt \right) \\
 & + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right. \\
 & \left. + \left(\int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad [150]
 \end{aligned}$$

Si establecemos $\omega_n = n\pi/L$, entonces:

$$\Delta\omega = \omega_{(n+1)} - \omega_n$$

$$\Delta\omega = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{(n)\pi}{L}$$

$$\Delta\omega = \frac{(n)\pi}{L} + \frac{\pi}{L} - \frac{(n)\pi}{L}$$

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$$

Reemplazando en [1] tenemos:

$$\begin{aligned} S_{ffx} &= \frac{\Delta\omega}{2\pi} \left(\int_{-L}^L f(t) dt \right) \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{-L}^L f(t) \cos(\omega nt) dt \right) \cos(\omega nx) \right. \\ &\left. + \left(\int_{-L}^L f(t) \text{sen}(\omega nt) dt \right) \text{sen}(\omega nx) \right] \Delta\omega \end{aligned} \quad [151]$$

Ahora vamos a expandir el intervalo $(-L, L)$ haciendo que $L \rightarrow \infty$. Como $L \rightarrow \infty$ implica que $\Delta\omega \rightarrow 0$, el límite [151] tiene la forma $\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} f(\omega_n) \Delta\omega$, la cual sugiere la definición de la integral $\int_0^{\infty} f(\omega) d\omega$. Por lo tanto, si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ existe, el límite del primer término incluido en [151] es cero, es decir:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} S_{ffx} &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta\omega}{2\pi} \left(\int_{-L}^L f(t) dt \right) \right\} + \frac{1}{\pi} \\ &* \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega nt) dt \right) \cos(\omega nx) \right. \right. \\ &\left. \left. + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sen}(\omega nt) dt \right) \text{sen}(\omega nx) \right] \Delta\omega \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} S_{ffx} &= \frac{1}{\pi} * \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega nt) dt \right) \cos(\omega nx) \right. \right. \\ &\left. \left. + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sen}(\omega nt) dt \right) \text{sen}(\omega nx) \right] \Delta\omega \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} S_{ffx} &= \frac{1}{\pi} * \int_0^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \right) \cos(\omega x) \right. \\ &\left. + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sen}(\omega t) dt \right) \text{sen}(\omega x) \right] d\omega \end{aligned}$$

Para:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt$$

Tenemos:

$$\lim_{\Delta\alpha_n \rightarrow 0} S_{ffx} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \operatorname{sen}(\omega x)] d\omega$$

$$\lim_{\Delta\alpha_n \rightarrow 0} S_{ffx} = \lim_{\Delta\alpha_n \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\omega) d\alpha$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\omega) d\omega \quad [152]$$

Donde:

$F(x)$: Integral de Fourier .

El resultado que se proporciona en [152] se llama integral de Fourier de f en $(-\infty, \infty)$.

Tal como señala el resumen siguiente, la estructura básica de la integral de Fourier nos recuerda la forma de una serie de Fourier.

Definición: La integral de Fourier de una función f definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ está dada por:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \operatorname{sen}(\omega x)] d\omega \quad [153]$$

Donde:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \quad [154]$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(\omega x) dx \quad [155]$$

Integrales seno y coseno de Fourier

Integral coseno de Fourier:

Cuando f es una función par en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces el producto $f(x) \cos(\omega x)$ lo es también, mientras que $f(x) \operatorname{sen}(\omega x)$ es una función impar. Como una consecuencia de las propiedades de funciones pares e impares vistas anteriormente, tenemos que (Chapra y Canale, 2006):

Sí $f(x) = f(-x) \rightarrow B(\omega) = 0$, entonces:

$$F(x)_c = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x) d\omega \quad [156]$$

Donde:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \quad [157]$$

$F(x)_c$: Integral coseno de Fourier.

Integral seno de Fourier:

De manera similar, cuando f es una función impar en $(-\infty, \infty)$, los productos $f(x) \cos(\omega x)$ y $f(x) \sin(\omega x)$ son funciones impares y pares, respectivamente. Por lo tanto, $A(\omega) = 0$ y:

$$F(x)_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega x) d\omega \quad [158]$$

Donde:

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx \quad [159]$$

$F(x)_s$: Integral seno de Fourier.

Forma compleja de la integral de Fourier

La integral de Fourier [152] también tiene una formulación compleja equivalente o formulación exponencial.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \cos(\omega x) + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \sin(\omega x) \right] d\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \cos(\omega x) + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \sin(\omega x) \right] d\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\omega t) \cos(\omega x) + \sin(\omega t) \sin(\omega x)] dt d\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos \omega(-t + x)] dt d\omega \quad [160]$$

Podemos observar en [160] que el integrando es una función par de ω por lo que.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos \omega(-t + x)] dt d\omega$$

Sumamos un cero al integrando: $i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\sin \omega(-t + x)] dt d\omega = 0$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos \omega(-t + x) + i \sin \omega(-t + x)] dt d\omega$$

De las fórmulas de Euler tenemos que $e^{ix} = \cos(x) + i\text{sen}(x)$, reemplazando tenemos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(-t+x)} dt d\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega \quad [161]$$

Ya que el integrando es una función impar de ω , la integral [161] puede expresarse como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad [162]$$

Donde:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad [163]$$

Transformadas de Fourier

Sí transformamos $f(x)$ en $F(\omega)$ mediante la transformada integral.

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) K(\omega, x) dx$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad [164]$$

Donde

$\mathcal{F}\{f(x)\}$: Transformada de Fourier.

$K(\alpha, x)$: Núcleo de la Transformada de Fourier.

Entonces la función f puede recuperarse mediante otra transformada integral

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) H(\omega, x) d\omega$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad [165]$$

Donde

$\mathcal{F}^{-1}\{f(x)\}$: Transformada inversa de Fourier.

$H(\omega, x)$: Núcleo de la Transformada inversa de Fourier.

La diferencia entre la serie de Fourier y la transformada de Fourier ahora será clara. La principal diferencia radica en que cada una se aplica a un tipo diferente de funciones (las series a formas de onda periódicas y la transformada a las no periódicas). Además de esta diferencia principal, los dos procedimientos difieren en cómo se mueven entre los dominios del tiempo y de la frecuencia. La serie de Fourier convierte una función continua

y periódica en el dominio del tiempo, a magnitudes de frecuencia discretas en el dominio de la frecuencia. Al contrario, la transformada de Fourier convierte una función discreta en el dominio del tiempo en una función continua en el dominio de la frecuencia. De esta manera, el espectro de frecuencia discreto generado por la serie de Fourier es análogo a un espectro de frecuencia continuo generado por la transformada de Fourier (CHAPRA. 2006).

Propiedades de la Transformada de Fourier

Como consecuencia de las ecuaciones [1] y [2], definimos lo que se llama un par de Fourier, como dos funciones $f(t)$ y $F(\omega)$ que verifican las ecuaciones mencionadas. Es muy interesante conocer las propiedades asociadas a tales pares Fourier, ya que, estas propiedades serán utilizadas en el análisis espectral de funciones $f(t)$ dadas, incluso sin mencionarlas expresamente. Recordar que podemos servirnos de tales propiedades directamente, era una de las ventajas, presentadas anteriormente que tiene el análisis espectral sobre el análisis armónico (DENNIS G. ZILL. 2006).

- Las ecuaciones [1] y [2], expresan una correspondencia uno a uno, entre las funciones $f(t)$ y $F(\omega)$. Dicha correspondencia no es, en general, punto a punto, sino solamente curva a curva.
- El par de Fourier puede estar formado por funciones reales, imaginarias o complejas; no obstante, deben satisfacerse las condiciones de Dirichlet.
- En las ecuaciones [1] y [2], la integral se extiende sobre todas las frecuencias desde $-\infty$ hasta ∞ . Aunque las frecuencias negativas, no tienen sentido físico, mantenemos esta formulación por razones matemáticas, debido a que de esta forma podemos aplicar eficientes métodos matemáticos.
- Puede demostrarse (BATH, 1974) la siguiente correspondencia matemática entre las funciones $f(t)$ y $F(\omega)$:

Cuadro 8. Correspondencia matemática de $f(t)$ y $F(\omega)$.

Fuente: Spectral Analysis in Geophysics. Elsevier, Amsterdam. Bath M. (1974).

$f(t)$	$F(\omega)$
Real y par	Real y par
Real e impar	Imaginarias e impar
Imaginaria y par	Imaginaria y par
Imaginaria e impar	Real e impar

Como consecuencia, a una función real $f(t)$ le corresponde una función compleja de $F(\omega)$, tal que:

$$F(\pm\omega) = F^*(\mp\omega)$$

Esto significa que la parte real de $F(\omega)$ es par y que la parte imaginaria es impar. A una función $F(\omega)$ que satisface esta propiedad se la llama Hermitiana.

Teoremas Básicos

Cuando dos funciones $f(t)$ y $F(\omega)$ forman un par de Fourier, se denota este par de la siguiente manera:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

Esto significa que las dos funciones están relacionadas por las ecuaciones [164] y [165].

Teorema de Linealidad, Superposición o Suma

$$\text{Si } f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \text{ y } f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

Entonces:

$$[a_1f_1(t) \pm a_2f_2(t)] \leftrightarrow [a_1F_1(\omega) \pm a_2F_2(\omega)] \quad [166]$$

Teorema de Dualidad o Simetría

$$\text{Si } f(t) \leftrightarrow F(\omega) \text{ entonces } F(\pm\omega) \leftrightarrow 2\pi f(\pm\omega) \quad [167]$$

Teorema del escalado en tiempo

$$\text{Si } f(t) \leftrightarrow F(\omega) \text{ y "a" es una constante real, entonces } f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F(\omega/a) \quad [168]$$

Teorema del Escalado en Frecuencia

$$\text{Si } f(t) \leftrightarrow F(\omega) \text{ y "a" es una constante real, entonces } \frac{1}{|a|} f(t/a) \leftrightarrow F(a\omega) \quad [169]$$

Teorema de desplazamiento en frecuencia

Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ y " ω_0 " es una constante real, entonces:

$$e^{\mp j\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(\omega \pm \omega_0) \quad [170]$$

Teorema de derivación

Sí $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ entonces $f'(t) \leftrightarrow i\omega F(\omega)$ y $-itf(t) \leftrightarrow F'(\omega)$ [171]

Espectro de Frecuencia

En ingeniería, las funciones en general se representan por conjuntos finitos de valores discretos. Es decir, los datos con frecuencia se obtienen de, o convierten a, una forma discreta. Como se indica en la figura 25, se puede dividir un intervalo de 0 a T en N sub intervalos de igual tamaño $\Delta t = T/N$. El subíndice n se emplea para designar los tiempos discretos a los cuales se toman las muestras. Así, f_n designa un valor de la función continua $f(t)$ tomado en t_n (CHAPRA. 2006).

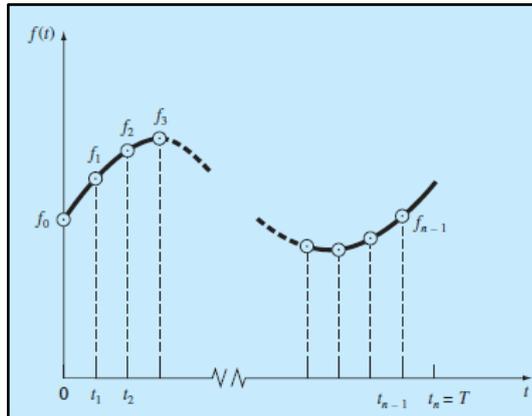


Figura 25. Los puntos muestrales de la serie discreta de Fourier.

Fuente: Métodos Numéricos para Ingenieros, Steven C. Chapra (2006).

Observe que los datos se especifican en $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. No hay un valor en $n = N$ (Véase Ramírez, 1985, para la razón de la exclusión de f_N). Para el sistema de la figura 25 se escribe la transformada discreta de Fourier como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(\Delta t n) e^{-i\omega(\Delta t n)} \Delta t$$

En nuestro caso, la serie de datos de intensidades máximas, están igualmente espaciados cada 1 año, por lo que $\Delta t = 1$.

$$F(\omega) \approx \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\omega n}$$

Para los k datos es decir $F(\omega)_k$ tenemos

$$F(\omega)_k \approx \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-ik\omega_0 n} \quad [172]$$

Donde k va desde 0 hasta $N-1$, la frecuencia fundamental es $\omega_0 = 2\pi/T$ y usando las identidades de Euler la ecuación [172] queda expresada en términos de senos y cosenos de la siguiente manera.

$$F(\omega)_k \approx \sum_{n=0}^{N-1} f_n [\cos(k\omega_0 n) - i \operatorname{sen}(k\omega_0 n)]$$

$$F(\omega)_k \approx \sum_{n=0}^{N-1} [f_n \cos(k\omega_0 n) - i f_n \operatorname{sen}(k\omega_0 n)]$$

La Transformada inversa de Fourier es:

$$f(t)_k \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{ik\omega_0 n} \quad [173]$$

Las ecuaciones [172] y [173] representan las análogas discretas de las ecuaciones [164] y [165], respectivamente. Como tales, ellas se emplean para calcular tanto la transformada directa como la inversa de Fourier, para datos discretos. Aunque es posible realizar tales cálculos a mano, son bastante laboriosos. Como lo expresa la ecuación [172], la TDF requiere N^2 operaciones complejas. Así, es necesario desarrollar un algoritmo computacional para implementar la TDF.

Espectro de Fase

De igual manera el espectro de fase se calcula a partir de los coeficientes de la integral de Fourier de la siguiente manera (CHAPRA. 2006).

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{-B(\omega)}{A(\omega)} + 2n\pi \right) \dots \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad [174]$$

Para:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad [175]$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt \quad [176]$$

Donde

$|F(\omega)|$: Espectro de fase.

Discretización del Espectro de Fase

Para la discretización se utiliza el mismo procedimiento visto anteriormente.

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos(\omega_0 n)$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sen(\omega t) dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} f_n \sen(\omega_0 n)$$

Para los k datos tenemos

$$A(\omega)_k \approx \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos(k\omega_0 n) \quad [177]$$

$$B(\omega)_k \approx \sum_{n=0}^{N-1} f_n \sen(k\omega_0 n) \quad [178]$$

De esta forma podemos calcular el espectro de fase.

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{-B(\omega)}{A(\omega)} + 2n\pi \right) \dots \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad [179]$$

Espectro de Potencia

La TDF tiene diversas aplicaciones en ingeniería que van desde el análisis de vibración de estructuras y mecanismos, hasta el procesamiento de señales. Como se describió antes, el espectro de amplitud y fase proporciona un medio para entender la estructura de señales bastante aleatorias. De manera similar, un análisis útil llamado espectro de potencia se puede desarrollar a partir de la transformada de Fourier (CHAPRA. 2006).

Como su nombre indica, el espectro de potencia se obtiene del análisis de la potencia de salida en sistemas eléctricos. En términos matemáticos, la potencia de una señal periódica en el dominio del tiempo se define como

$$P = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t)^2 dt \quad [180]$$

Ahora, otra forma de entender esta información es expresándola en el dominio de la frecuencia y calculando la potencia asociada a cada componente de frecuencia. Después esta información se despliega como un espectro de potencia, es decir, una gráfica de la potencia contra la frecuencia. Si la serie de Fourier para $f(t)$ es:

$$f_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{ik\omega_0 t}$$

Se satisface la siguiente relación (GABEL, ROBERTS. 1987):

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t)^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 \quad [181]$$

De esta forma, la potencia en $f(t)$ se determina al sumar los cuadrados de los coeficientes de Fourier, es decir, las potencias asociadas con los componentes de frecuencia individual.

$$P_k = |F(\omega)_k|^2 \quad [182]$$

El espectro de potencia es la gráfica de P_k en función de la frecuencia $k\omega_0$.

Condiciones de muestreo para los Espectros

Cuando se toma una serie de valores de una función dada, decimos que se ha realizado un muestreo de tal función. Matemáticamente, este proceso equivale a multiplicar la función dada, por una función formada por una serie de funciones impulso, equidistantes en tiempo. El muestreo de una función dada, debe realizarse de forma cuidadosa para evitar una situación como la ilustrada en la figura 26, en esta figura vemos que el muestreo no reproduce la verdadera función (VÍCTOR CORCHETE. 2017).

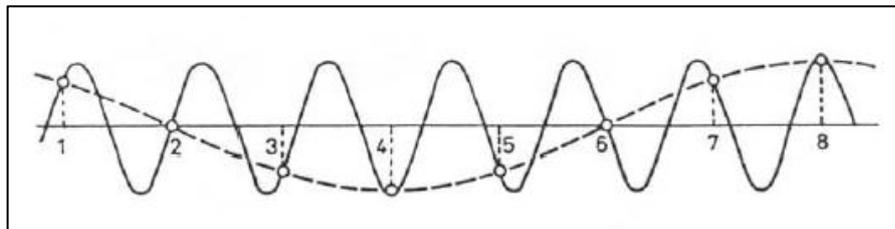


Figura 26. Efecto denominado aliasing.

Fuente: Análisis Espectral Básico, Víctor Corchete (2017).

La razón del indeseable resultado presentado en la figura 26, reside en un incorrecto muestreo de la función dada. En toda función limitada en banda, existe una frecuencia máxima, que corresponde al periodo más corto presente en la función considerada, de tal forma que:

$$F(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > 2\pi f_{\text{máx}} \quad [183]$$

Por tanto, cuando realicemos el muestreo de tal función, debemos tomar un intervalo de muestreo t , que verifique:

$$t \leq \frac{T_{\text{mín}}}{2} \quad \text{ó} \quad t \leq \frac{1}{2f_{\text{máx}}} \quad \text{ó} \quad 2f_{\text{máx}} \leq \frac{1}{t} \quad [184]$$

Donde T_{\min} es el menor período existente en la función considerada, correspondiente a la frecuencia máxima f_{\max} . Notar que tomamos $1/2$ de T_{\min} como límite para el intervalo de muestreo t , debido a que es necesario tomar al menos 3 puntos para digitalizar un período, es decir, 2 intervalos de tiempo de muestreo.

Así, la frecuencia de muestreo $1/t$ debe ser al menos dos veces la frecuencia máxima. A la frecuencia de muestreo $f_s = 2f_{\max}$ se la llama frecuencia Nyquist o también razón de muestreo de Nyquist. Cuando $1/t$ sea menor que la frecuencia de Nyquist, no será posible recobrar a partir de tal muestreo, el verdadero espectro de la función considerada. Este efecto es denominado aliasing en el dominio frecuencia o simplemente aliasing. Este efecto indeseable debe ser evitado con una adecuada elección de la razón de muestreo.

Análogamente sucede en el dominio de la frecuencia, cuando trabajamos con el espectro de una función $f(t)$. Al computar un espectro debemos, previamente, realizar un muestreo del mismo procurando, como antes, elegir una adecuada razón de muestreo. En este caso sabemos que el mayor periodo presente en la función $f(t)$, corresponde a la frecuencia más pequeña del espectro, por tanto:

$$\Delta f \leq \frac{1}{T_{\max}} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{T_{\max}} = f_{\min} \quad \text{ó} \quad \Delta f \leq f_{\min} \frac{1}{t} \quad [185]$$

Donde Δf es la razón de muestreo en frecuencia. Si elegimos Δf mayor que la frecuencia mínima, no podremos recobrar la verdadera función considerada, a partir del muestreo del espectro realizado. Este efecto indeseable se denomina aliasing en el dominio del tiempo.

Así el espectro de una serie de tiempo, es una serie de valores que llamamos Transformada Discreta De Fourier. En general, la Transformada Discreta De Fourier es una aproximación de la transformada continua de Fourier, sin embargo, en nuestro caso particular, resulta ser el verdadero espectro de Fourier de la serie temporal considerada. Esto es debido a que en la práctica todos los registros de tiempo son finitos, estando compuestos por valores equidistantes en tiempo; por tanto, todos estos registros o series temporales, poseen estas propiedades.

CAPÍTULO III

3. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Zona de estudio

El presente trabajo de investigación se realizó en la ciudad de Cajamarca, Provincia de Cajamarca, departamento de Cajamarca, entre finales del año 2016 a comienzos del año 2018. La información utilizada comprende 43 años de registro histórico, desde el año 1973 hasta el año 2015 y corresponde a la estación Weberbauer, ubicada en la ciudad de Cajamarca, Provincia de Cajamarca, departamento de Cajamarca, con coordenadas UTM WGS84 - Zona 17 Sur.

Norte : 9206979 m.

Este : 776876.6 m.

Altura : 2673 m.s.n.m.

3.2. Metodología

Criterio	Tipo de investigación
Tipo	Aplicada
Nivel de investigación	Predictiva
Diseño de investigación	No experimental
Dimensión de variables	Objetivas o físicas
Temporalidad	Longitudinal

3.3. Información Meteorológica

Tabla 1. Intensidades máximas de lluvia, período 1973-2015.

INTENSIDADES MAXIMAS (Primera serie)

Estación A. Weberbauer - Cajamarca 1973 - 2015

Año Dur	5 min	10 min	30 min	60 min	120 min
1973	101.00	71.00	24.00	14.00	11.00
1974	73.00	58.00	34.00	18.00	19.00
1975	90.00	50.00	24.00	16.00	10.00
1976	68.00	63.00	37.00	19.00	9.00
1977	65.00	53.00	37.00	21.00	11.00
1978	26.00	24.00	21.00	12.00	6.00
1979	60.00	60.00	38.00	23.00	14.00
1980	73.02	60.10	33.80	21.08	9.24
1981	67.20	54.80	29.13	15.54	13.02
1982	88.29	75.15	37.20	23.10	13.27
1983	75.30	50.40	31.40	23.71	13.99
1984	112.80	71.80	27.60	15.63	9.80

Año	Dur	5 min	10 min	30 min	60 min	120 min
1985		59.31	54.40	25.56	14.70	8.05
1986		84.60	65.40	30.11	15.60	8.23
1987		76.00	49.20	21.60	13.20	7.95
1988		70.40	52.80	23.00	13.79	7.85
1989		73.60	47.80	28.00	16.00	9.60
1990		111.60	75.00	37.94	23.00	12.00
1991		83.00	73.00	41.00	26.00	14.00
1992		56.00	39.00	19.00	10.00	5.00
1993		58.00	51.00	28.00	18.00	10.00
1994		91.49	64.18	36.22	19.04	12.91
1995		71.11	56.25	28.66	16.72	9.32
1996		81.30	60.21	32.44	17.88	11.12
1997		82.20	68.10	35.04	17.86	8.94
1998		92.00	66.34	40.60	27.10	13.50
1999		70.80	38.30	13.80	9.90	6.40
2000		46.80	32.40	23.00	15.81	7.95
2001		67.20	49.90	25.40	17.28	9.70
2002		28.20	20.60	13.80	8.70	4.40
2003		70.80	42.60	15.90	9.80	6.10
2004		84.60	84.60	33.00	18.70	9.40
2005		45.60	43.80	20.50	11.10	6.50
2006		30.00	30.00	15.00	10.30	6.90
2007		72.00	64.00	32.70	19.40	12.30
2008		47.00	33.24	22.80	13.66	9.83
2009		68.00	49.20	32.04	22.00	4.05
2010		86.40	38.50	30.67	20.28	10.89
2011		62.40	36.60	26.80	16.60	10.00
2012		64.00	42.20	23.60	15.20	6.80
2014		119.10	69.30	27.24	15.87	9.23
2015		100.00	63.89	27.28	15.90	9.89
Prom.		72.69	53.64	28.21	16.94	9.72
Desv. E.		21.01	14.85	7.25	4.46	3.01
Obs.		42	42	42	42	42

* Para el año 2012 solo se contó con información desde el mes de enero a mayo. Para el año 2013 no se cuenta con información suficiente. Los años 2014 y 2015 han sido obtenidos de bandas semanales

Procedemos a graficar las intensidades máximas de lluvia para diferentes duraciones, debido a que no tenemos información meteorológica para el año 2013, descartamos los años de observación 2014 y 2015, y además el año 2012 por contar solo con datos de enero a mayo.

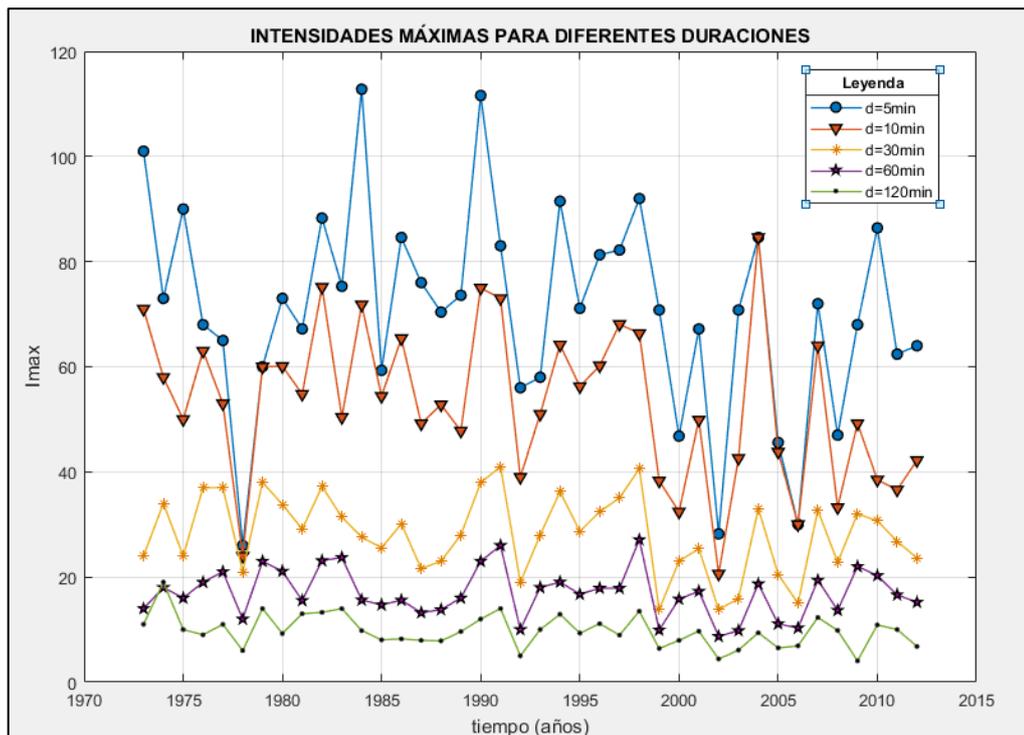


Gráfico 1. Intensidades máximas de lluvia, período 1973-2011.

Calculamos los estadísticos de la muestra, para eso usamos el programa “MomentP”.

Tabla 2. parámetros estadísticos.

ESTADÍSTICOS	promedio	Varianza	std	C. Variación	C. Asimetría	C. Curtosis
5 min	71.03	395.05	19.88	0.28	-0.30	0.47
10 min	53.27	224.99	15.00	0.28	-0.19	-0.40
30 min	28.38	56.10	7.49	0.26	-0.28	-0.73
60 min	17.04	21.33	4.62	0.27	0.14	-0.47
120 min	9.80	9.55	3.09	0.32	0.47	0.79

Inferimos del coeficiente de variación.

Los coeficientes de variación de las series de intensidades máximas de lluvia distan poco de cero, por lo que se concluye que presentan poca dispersión debido a que la mayor cantidad de datos, están concentrados alrededor de la media.

Inferimos del coeficiente asimetría.

Se observa que las intensidades máximas de lluvia para duraciones de 5,10,30 minutos, presentan coeficientes de asimetría negativos, lo que quiere decir que las mayores concentraciones de datos se encuentran por debajo del promedio. Las intensidades máximas de lluvia para duraciones de 60,120 minutos presentan coeficientes de asimetría

positivos, lo que quiere decir que las mayores concentraciones de datos se encuentran por encima del promedio. Todos los coeficientes de asimetría distan ligeramente de cero, por lo que se concluye que tienden a ser simétricas y se asume que las series de intensidades máximas de lluvia podrían seguir una distribución de probabilidad normal.

Inferimos del coeficiente curtosis.

Las intensidades máximas de lluvia para duraciones de 10,30,60 minutos, presentan coeficientes de curtosis negativos, indica que los datos muestran menos valores atípicos extremos. Las intensidades máximas de lluvia para duraciones de 5 y 120 minutos, presentan coeficientes de curtosis positivos, lo que indica que los datos muestran más valores atípicos extremos. Todos los coeficientes de curtosis distan poco de cero, por lo que se concluye que las series de intensidades máximas de lluvia presentan pocos valores atípicos.

3.4. Análisis de consistencia

Análisis visual gráfico

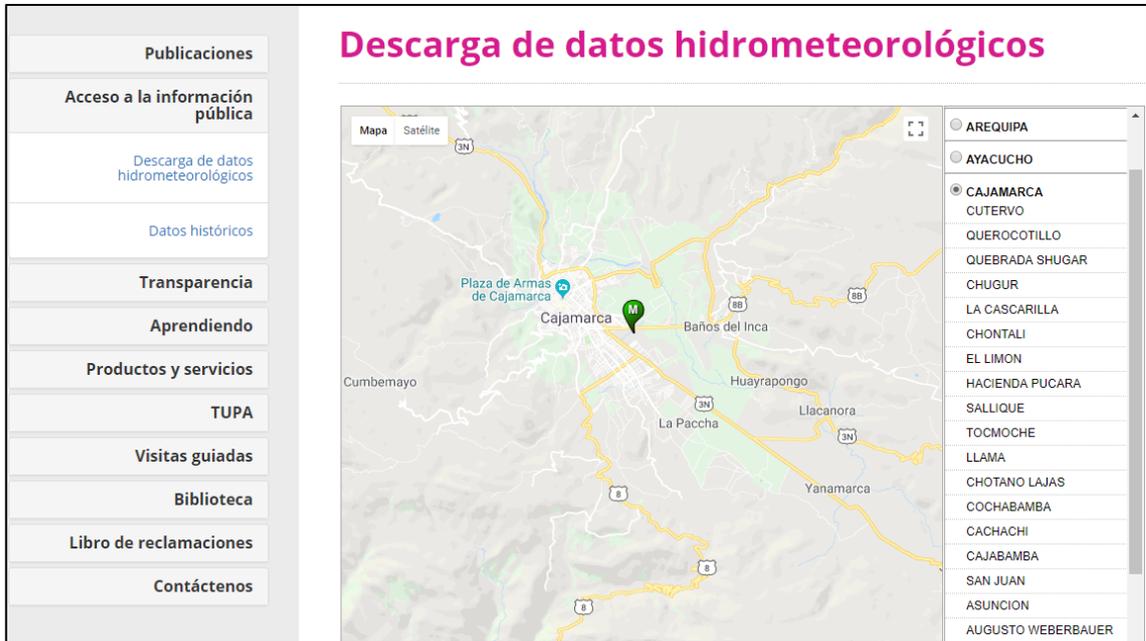
Cómo la información de intensidades máximas de lluvia de estaciones cercanas cuenta con períodos cortos, vamos a proceder a evaluar la consistencia de nuestra información con un método alternativo, el cual consiste en comparar las intensidades máximas de lluvia, con las precipitaciones anuales acumuladas debidamente escaladas, estos últimos datos fueron colgados por el Senamhi como información gratuita en el año 2017. La justificación para este método a parte de la poca información encontrada, son los pocos errores sistemáticos que se comente en la lectura de precipitación en los Pluviómetros, según se detalla en el manual de la Organización Meteorológica Mundial (OMM), además de tener en cuenta que el procesamiento de bandas pluviográficas también están expuestas a grandes errores sistemáticos y su proceso depende de la experiencia del hidrólogo.

Procesamiento de datos de precipitación diaria Ppd

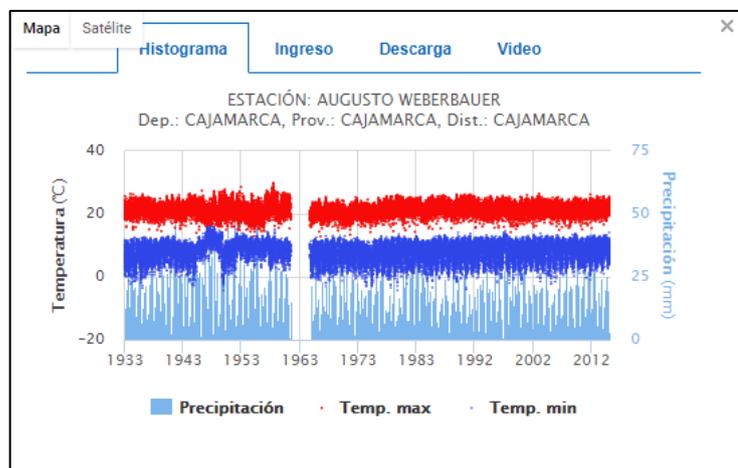
Los datos que se obtuvieron gratuitamente del Senamhi, son precipitaciones diarias acumuladas (Ppd) desde el año 1934 hasta el año 2014. Para poder compararlo con las intensidades máximas de lluvia, procedemos a obtener la precipitación acumulada anual mediante el programa “PpAcumAnual”, el número que asignó Senamhi a los días donde no se cuenta con información meteorológica es el -99.9, por lo que dicho programa detecta la información de los días faltantes y automáticamente le asigna dicho valor al

año que se tenga información incompleta, para ello utilizamos el software Matlab y procedemos de la siguiente manera.

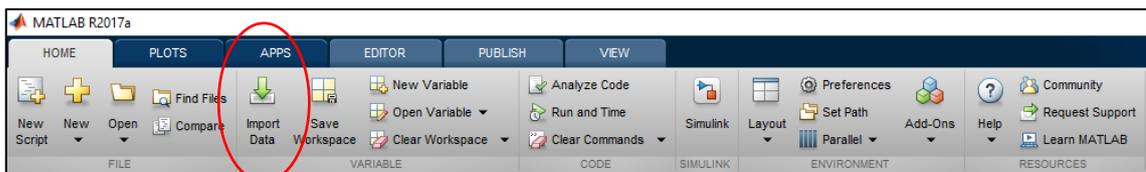
Descargar los datos de precipitación acumulada diaria de la estación Weberbauer de la página Perú clima. <http://www.senamhi.gob.pe/?p=descarga-datos-hidrometeorologicos>.



Nota: Los datos descargados están en la extensión *.txt, y contienen información de Pp, temperatura máxima y mínima.



Importar datos:



Seleccionamos los años de 1973 al 2014, la primera, segunda y tercera columna contiene información de la fecha y la cuarta columna contiene información de precipitación, la

quinta y sexta columna contiene información de temperatura máxima y temperatura mínima, respectivamente.

	A	B	C	D	E	F
Weberbauer1						
	Number	Number	Number	Number	Number	Number
14328	1972	12	22	0	22	2.8
14329	1972	12	23	0	21.6	5.8
14330	1972	12	24	0	21.2	2.8
14331	1972	12	25	0	23.6	0.1
14332	1972	12	26	0	24.6	2.8
14333	1972	12	27	0.8	25	5.7
14334	1972	12	28	0	23.6	8.4
14335	1972	12	29	0	22.6	5.1
14336	1972	12	30	0	24	7.3
14337	1972	12	31	0.01	23.4	5.5
14338	1973	1	1	0	23.9	9.5
14339	1973	1	2	0	22.9	9.4
14340	1973	1	3	1.4	20.6	11.5
14341	1973	1	4	0.01	21.5	11.7
14342	1973	1	5	0	22	10
14343	1973	1	6	0.01	23.1	12.5
14344	1973	1	7	3.7	20.4	12.2
14345	1973	1	8	1.8	19.5	10.4
14346	1973	1	9	6.1	20.4	10.9
14347	1973	1	10	13.8	20	11
14348	1973	1	11	0	22.4	8.8

Corremos el programa.

```

Command Window
>> [SWe] = PpAcumAnual(MWe)

SWe =

    1.0e+03 *

    1.9730    0.7392
  
```

Obtenemos las Precipitaciones acumuladas anuales de la estación Weberbauer.

	1	2	3
1	1973	739.2300	
2	1974	646.8900	
3	1975	817.6000	
4	1976	540.2500	
5	1977	694.5300	
6	1978	358.8700	
7	1979	534.7500	
8	1980	553.9300	
9	1981	736.1400	
10	1982	-99.9000	
11	1983	756.9000	

Graficamos.

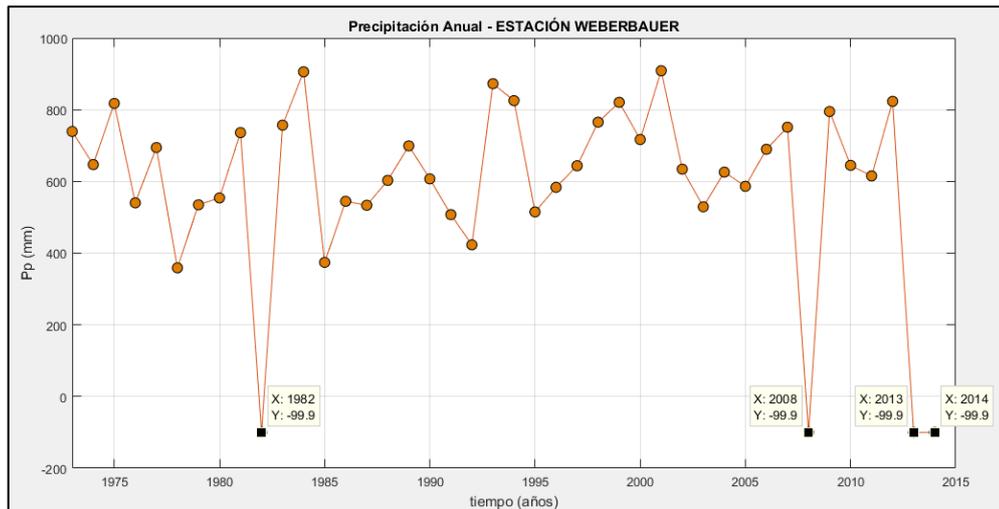


Gráfico 2. Precipitaciones anuales de la estación Weberbauer, período 1973-2014.

Podemos observar que la información es incompleta para los años 1982, 2008, 2013, 2014, por lo que vamos a proceder a completar dicha información, con datos de precipitación de una estación que cumpla con las siguientes características.

- Contenga los datos de Pp, en los años en los que falta información de la estación en estudio.
- Sea la más cercana a la estación en estudio.
- Al graficar la precipitación versus la estación en estudio, podamos observar un patrón similar de tendencia, en cuanto a la variación de Pp en el tiempo.

La estación San Juan cumple con las características antes mencionadas, por lo que, procedemos a obtener la precipitación acumulada anual, siguiendo el mismo procedimiento, que el hecho para la Pp anual de la estación Weberbauer.

Variables - SSJ		
SSJ		
50x2 double		
	1	2
1	1965	705.2200
2	1966	401.6700
3	1967	971.2700
4	1968	530.9800
5	1969	884.0500
6	1970	854.0500
7	1971	1098
8	1972	872.5000
9	1973	1.2923e+03
10	1974	860.1300
11	1975	1.2183e+03
12	1976	913.5100
13	1977	1.1391e+03
14	1978	536.3000

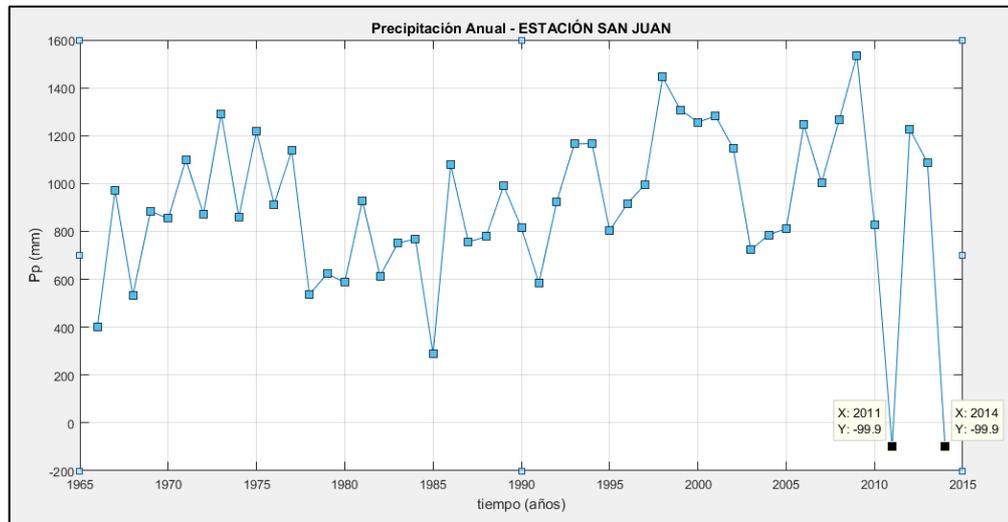


Gráfico 3. Precipitaciones anuales de la estación San Juan, período 1973-2015

Podemos observar que la información es incompleta para los años 2011 y 2014 pero contiene los datos que falta en la información de la estación Weberbauer.

Graficamos las precipitaciones anuales de las dos estaciones y observamos que tienen un patrón similar de tendencia.

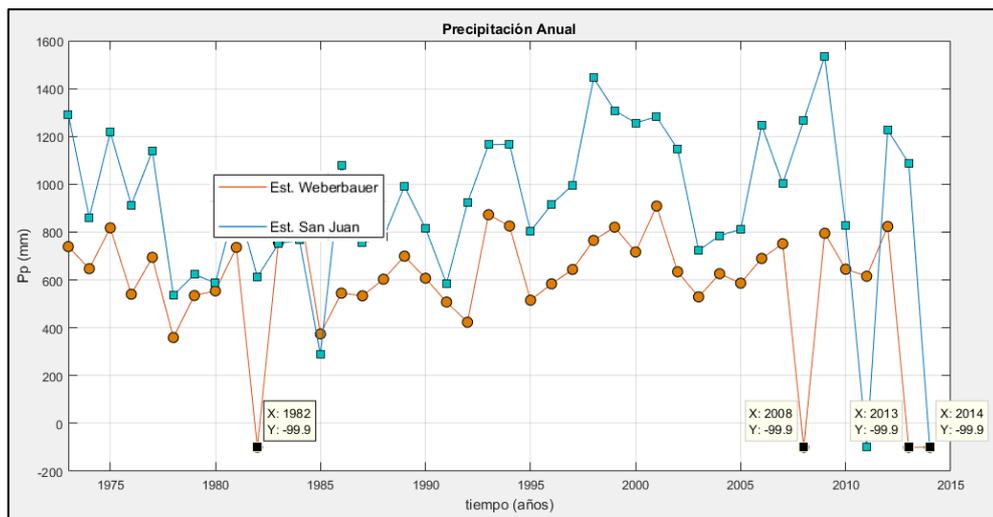


Gráfico 4. Precipitaciones anuales de la estación San Juan y Weberbauer.

Completamos los datos mediante una regresión lineal, el criterio a emplear consiste en utilizar todos los datos que tengamos en la estación San Juan (PpSJ), extraemos la misma cantidad de datos de la estación Weberbauer (PpW), es decir las precipitaciones anuales de los años de 1965 al 2014, luego removemos los años en los que falta información, anulando ese año de observación, finalmente ordenamos de menor a mayor y procedemos a realizar una regresión lineal y completar los datos faltantes de la estación Weberbauer.

```

Command Window
>> [r,m,b] = regression(PpSJ,PpW,'one')

r =

    0.9909

m =

    0.4979

b =

    181.7381

>> plotregression(PpSJ,PpW,'Regression')

```

Obtenemos un coeficiente de determinación del R2=98% siendo la ecuación lineal:

$$PpW = 0.4979 * PpSJ + 181.7381$$

PpW: Precipitación acumulada anual de la estación Weberbauer.

PpSJ: Precipitación acumulada anual de la estación San Juan.

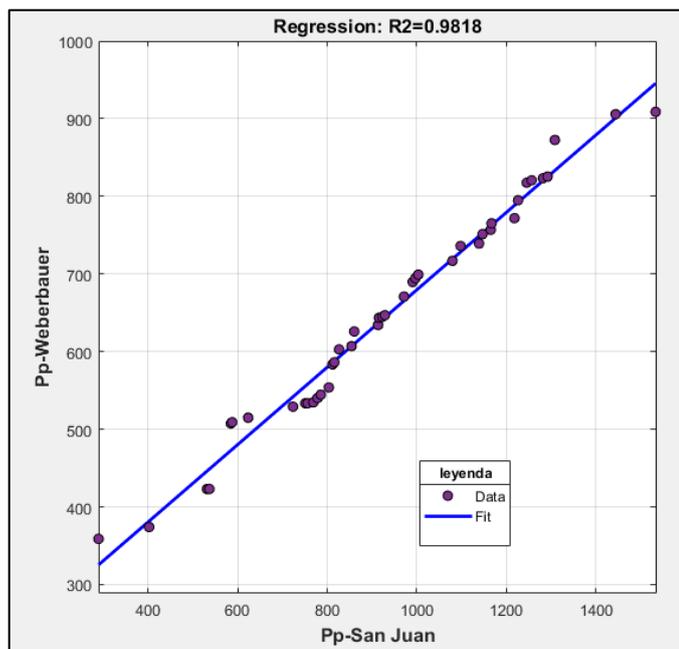


Gráfico 5. Modelo de Regresión lineal, PpSJ vs PpW.

Teniendo la ecuación lineal con el modelo de regresión, completamos los datos faltantes para los años 1965, 1969, 1972, 1982, 2008. Ahora procedemos a realizar nuestro análisis visual, graficando las Pp de la estación Weberbauer (debidamente escaladas) versus las intensidades máximas para 5,10,30,60,120 min. Tenemos una mejor visualización con las

intensidades máximas para 5 min, debido a que para las otras duraciones hay una atenuación significativa de la intensidad.

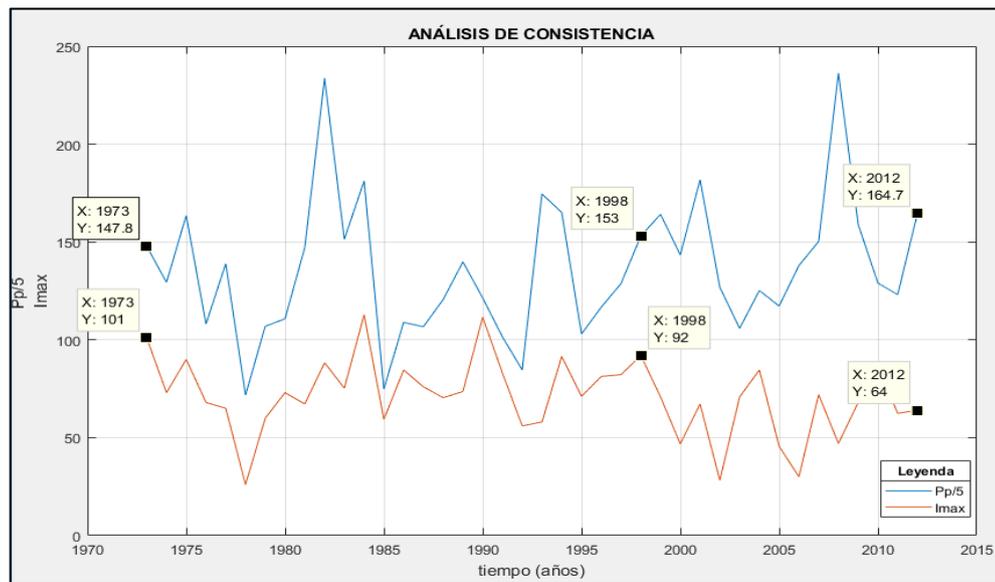


Gráfico 6. Análisis visual gráfico.

Observamos que hay un patrón similar de tendencia para el período de 1973 a 1998, y para el período de 1999 a 2012 no siguen este mismo patrón de tendencia, esto hace suponer que existe algún tipo de error de procesamiento de bandas pluviográficas. Concluyo en lo siguiente, que, debido a no tener información meteorológica de otras estaciones, para realizar un análisis de consistencia con otro método, no doy por concluyente mi afirmación en cuanto a la calidad de los datos, por lo cual me veo forzado a confiar en la calidad de los datos brindados por Senamhi y continuar el análisis de la variación temporal de las intensidades máximas de lluvia en el valle de Cajamarca. Se tomará el período comprendido entre 1973 a 2011, el año 2012 no se tomará en cuenta, debido a que, solo se cuenta con información desde el mes de enero a mayo, lo cual no garantiza que en esos meses se encuentren las máximas intensidades de lluvia.

3.5. Cálculo del número de años de registro de una serie hidrológica.

Con el fin de obtener el número mínimo de datos de un registro histórico para describir el comportamiento aleatorio de las intensidades máximas de lluvia, en el siguiente proyecto de investigación se utilizará métodos estadísticos y matemáticos.

Métodos estadísticos

El procedimiento consiste en lo siguiente:

- A.** Ajustar las series de intensidades máximas de lluvia para diferentes duraciones a una función de probabilidad teórica (Normal, Exponencial, Gama, Pearson tipo III, Gumbel, Valor extremo Generalizado), usando las funciones de probabilidad empírica de excedencia (Hazen, Weibull, Chegodayev, Blom, Tukey) y escoger las distribuciones teóricas y empíricas de mejor ajuste mediante el test de kolmogorov.
- B.** Obtener las funciones inversas de las funciones de distribuciones de probabilidad seleccionadas anteriormente.
- C.** construir las curvas IDT (Intensidad, Duración, Período de Retorno).
- D.** Generalizar las curvas IDT mediante modelos matemáticos (Ec. Normal, Ec. Koutsoyiannis, Ec. GEV, Ec. Jhowen), calcular sus parámetros a partir de las submuestras para un número de datos $n \leq N$, luego reproducir la muestra para $n=N$ y obtener la variación del coeficiente de determinación (Pearson, Spearman, Kendall) en función del número de datos. Por último, escoger el número de datos mínimo que reproduzca la muestra con un coeficiente de determinación aceptable.

Ajuste de las series de intensidades máximas de lluvia a una distribución de probabilidad.

Matriz de intensidades de Lluvia (MX) para diferentes duraciones

Tabla 3. Matriz MX, Intensidades máximas de lluvia.

INTENSIDADES MÁXIMAS DE LLUVIA					
Año	5 min	10 min	30 min	60 min	120 min
1973	101.00	71.00	24.00	14.00	11.00
1974	73.00	58.00	34.00	18.00	19.00
1975	90.00	50.00	24.00	16.00	10.00
1976	68.00	63.00	37.00	19.00	9.00
1977	65.00	53.00	37.00	21.00	11.00
1978	26.00	24.00	21.00	12.00	6.00
1979	60.00	60.00	38.00	23.00	14.00
1980	73.02	60.10	33.80	21.08	9.24
1981	67.20	54.80	29.13	15.54	13.02
1982	88.29	75.15	37.20	23.10	13.27
1983	75.30	50.40	31.40	23.71	13.99
1984	112.80	71.80	27.60	15.63	9.80
1985	59.31	54.40	25.56	14.70	8.05
1986	84.60	65.40	30.11	15.60	8.23

INTENSIDADES MÁXIMAS DE LLUVIA					
Año	5 min	10 min	30 min	60 min	120 min
1987	76.00	49.20	21.60	13.20	7.95
1988	70.40	52.80	23.00	13.79	7.85
1989	73.60	47.80	28.00	16.00	9.60
1990	111.60	75.00	37.94	23.00	12.00
1991	83.00	73.00	41.00	26.00	14.00
1992	56.00	39.00	19.00	10.00	5.00
1993	58.00	51.00	28.00	18.00	10.00
1994	91.49	64.18	36.22	19.04	12.91
1995	71.11	56.25	28.66	16.72	9.32
1996	81.30	60.21	32.44	17.88	11.12
1997	82.20	68.10	35.04	17.86	8.94
1998	92.00	66.34	40.60	27.10	13.50
1999	70.80	38.30	13.80	9.90	6.40
2000	46.80	32.40	23.00	15.81	7.95
2001	67.20	49.90	25.40	17.28	9.70
2002	28.20	20.60	13.80	8.70	4.40
2003	70.80	42.60	15.90	9.80	6.10
2004	84.60	84.60	33.00	18.70	9.40
2005	45.60	43.80	20.50	11.10	6.50
2006	30.00	30.00	15.00	10.30	6.90
2007	72.00	64.00	32.70	19.40	12.30
2008	47.00	33.24	22.80	13.66	9.83
2009	68.00	49.20	32.04	22.00	4.05
2010	86.40	38.50	30.67	20.28	10.89
2011	62.40	36.60	26.80	16.60	10.00

Cálculo de la probabilidad de excedencia empírica

Hacemos uso del programa “ProbExcEmp”, el cual utiliza la función generalizada de probabilidad empírica para calcular las frecuencias.

Tabla 4. Frecuencias empíricas.

PROBABILIDAD DE EXCEDENCIA EMPÍRICA						
m	Hazen	Weibull	Chegodayev	Blom	Tukey	Gringorten
1	0.0128	0.0250	0.0178	0.0159	0.0169	0.0143
2	0.0385	0.0500	0.0431	0.0414	0.0424	0.0399
3	0.0641	0.0750	0.0685	0.0669	0.0678	0.0654
4	0.0897	0.1000	0.0939	0.0924	0.0932	0.0910
5	0.1154	0.1250	0.1193	0.1178	0.1186	0.1166
6	0.1410	0.1500	0.1447	0.1433	0.1441	0.1421
7	0.1667	0.1750	0.1701	0.1688	0.1695	0.1677
8	0.1923	0.2000	0.1954	0.1943	0.1949	0.1933
9	0.2179	0.2250	0.2208	0.2197	0.2203	0.2188
10	0.2436	0.2500	0.2462	0.2452	0.2458	0.2444

PROBABILIDAD DE EXCEDENCIA EMPÍRICA						
m	Hazen	Weibull	Chegodayev	Blom	Tukey	Gringorten
11	0.2692	0.2750	0.2716	0.2707	0.2712	0.2699
12	0.2949	0.3000	0.2970	0.2962	0.2966	0.2955
13	0.3205	0.3250	0.3223	0.3217	0.3220	0.3211
14	0.3462	0.3500	0.3477	0.3471	0.3475	0.3466
15	0.3718	0.3750	0.3731	0.3726	0.3729	0.3722
16	0.3974	0.4000	0.3985	0.3981	0.3983	0.3978
17	0.4231	0.4250	0.4239	0.4236	0.4237	0.4233
18	0.4487	0.4500	0.4492	0.4490	0.4492	0.4489
19	0.4744	0.4750	0.4746	0.4745	0.4746	0.4744
20	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
21	0.5256	0.5250	0.5254	0.5255	0.5254	0.5256
22	0.5513	0.5500	0.5508	0.5510	0.5508	0.5511
23	0.5769	0.5750	0.5761	0.5764	0.5763	0.5767
24	0.6026	0.6000	0.6015	0.6019	0.6017	0.6022
25	0.6282	0.6250	0.6269	0.6274	0.6271	0.6278
26	0.6538	0.6500	0.6523	0.6529	0.6525	0.6534
27	0.6795	0.6750	0.6777	0.6783	0.6780	0.6789
28	0.7051	0.7000	0.7030	0.7038	0.7034	0.7045
29	0.7308	0.7250	0.7284	0.7293	0.7288	0.7301
30	0.7564	0.7500	0.7538	0.7548	0.7542	0.7556
31	0.7821	0.7750	0.7792	0.7803	0.7797	0.7812
32	0.8077	0.8000	0.8046	0.8057	0.8051	0.8067
33	0.8333	0.8250	0.8299	0.8312	0.8305	0.8323
34	0.8590	0.8500	0.8553	0.8567	0.8559	0.8579
35	0.8846	0.8750	0.8807	0.8822	0.8814	0.8834
36	0.9103	0.9000	0.9061	0.9076	0.9068	0.9090
37	0.9359	0.9250	0.9315	0.9331	0.9322	0.9346
38	0.9615	0.9500	0.9569	0.9586	0.9576	0.9601
39	0.9872	0.9750	0.9822	0.9841	0.9831	0.9857

Calculamos el período de retorno para las diferentes funciones de probabilidad de excedencia empírica.

Tabla 5. Período de Retorno en años.

PERÍODO DE RETORNO						
m	Hazen	Weibull	Chegod.	Blom	Tukey	Gring.
1	78.0	40.0	56.3	62.8	59.0	69.9
2	26.0	20.0	23.2	24.2	23.6	25.1
3	15.6	13.3	14.6	15.0	14.8	15.3
4	11.1	10.0	10.6	10.8	10.7	11.0
5	8.7	8.0	8.4	8.5	8.4	8.6
6	7.1	6.7	6.9	7.0	6.9	7.0
7	6.0	5.7	5.9	5.9	5.9	6.0

PERÍODO DE RETORNO						
m	Hazen	Weibull	Chegod.	Blom	Tukey	Gring.
8	5.2	5.0	5.1	5.1	5.1	5.2
9	4.6	4.4	4.5	4.6	4.5	4.6
10	4.1	4.0	4.1	4.1	4.1	4.1
11	3.7	3.6	3.7	3.7	3.7	3.7
12	3.4	3.3	3.4	3.4	3.4	3.4
13	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1
14	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9
15	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7
16	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
17	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4
18	2.2	2.2	2.2	2.2	2.2	2.2
19	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1
20	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
21	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
22	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8
23	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7
24	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7
25	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6
26	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
27	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
28	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4
29	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4
30	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3
31	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3
32	1.2	1.3	1.2	1.2	1.2	1.2
33	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
34	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
35	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1
36	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1
37	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1
38	1.0	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0
39	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Cálculo de la probabilidad de excedencia teórica

Hacemos uso del programa “ProbExcTeo”, calcula los parámetros estadísticos de cada distribución de probabilidad a partir de los momentos pesados o tradicionales.

Para una duración de 5 minutos.

Tabla 6. Probabilidad de excedencia teórica para un $d=5\text{min}$.

I _{max} 5					
Normal	Gamma	Pearson	Exponencial	Gumbel	GEV
0.0178	0.0300	0.0247	0.2043	0.0372	0.0023
0.0206	0.0332	0.0278	0.2078	0.0401	0.0040
0.0658	0.0768	0.0725	0.2412	0.0780	0.0517
0.1457	0.1451	0.1460	0.2738	0.1350	0.1479
0.1516	0.1501	0.1514	0.2758	0.1392	0.1549
0.1699	0.1654	0.1681	0.2816	0.1521	0.1763
0.1925	0.1845	0.1887	0.2885	0.1683	0.2024
0.2196	0.2073	0.2134	0.2963	0.1880	0.2329
0.2473	0.2309	0.2388	0.3039	0.2085	0.2636
0.2473	0.2309	0.2388	0.3039	0.2085	0.2636
0.2734	0.2534	0.2629	0.3108	0.2284	0.2920
0.2870	0.2652	0.2755	0.3143	0.2389	0.3065
0.3026	0.2788	0.2901	0.3183	0.2512	0.3231
0.4012	0.3679	0.3835	0.3430	0.3346	0.4246
0.4149	0.3806	0.3967	0.3464	0.3470	0.4383
0.4485	0.4125	0.4294	0.3548	0.3785	0.4716
0.4600	0.4236	0.4408	0.3577	0.3896	0.4829
0.4604	0.4240	0.4412	0.3578	0.3900	0.4833
0.4805	0.4435	0.4609	0.3629	0.4098	0.5028
0.4983	0.4611	0.4787	0.3674	0.4279	0.5201
0.5045	0.4673	0.4849	0.3691	0.4343	0.5261
0.5045	0.4673	0.4849	0.3691	0.4343	0.5261
0.5126	0.4753	0.4930	0.3711	0.4427	0.5338
0.5605	0.5242	0.5415	0.3839	0.4947	0.5795
0.5605	0.5242	0.5415	0.3839	0.4947	0.5795
0.5763	0.5407	0.5577	0.3882	0.5126	0.5944
0.5763	0.5407	0.5577	0.3882	0.5126	0.5944
0.6191	0.5863	0.6020	0.4005	0.5632	0.6345
0.6679	0.6400	0.6533	0.4154	0.6246	0.6797
0.7105	0.6885	0.6989	0.4297	0.6814	0.7189
0.7222	0.7022	0.7115	0.4339	0.6975	0.7297
0.7439	0.7275	0.7351	0.4419	0.7278	0.7496
0.7752	0.7648	0.7693	0.4546	0.7725	0.7784
0.8866	0.9005	0.8924	0.5160	0.9291	0.8817
0.8886	0.9028	0.8945	0.5174	0.9315	0.8835
0.8996	0.9159	0.9066	0.5262	0.9448	0.8940
0.9805	0.9953	0.9884	0.6555	0.9996	0.9754
0.9844	0.9971	0.9915	0.6723	0.9999	0.9798
0.9883	0.9986	0.9943	0.6935	1.0000	0.9843

Para una duración de 10 minutos.

Tabla 7. Probabilidad de excedencia teórica para un d=10min.

lmax 10					
Normal	Gamma	Pearson	Exponencial	Gumbel	GEV
0.0184	0.0308	0.0230	0.2043	0.0378	0.0073
0.0724	0.0827	0.0768	0.2440	0.0829	0.0707
0.0737	0.0839	0.0781	0.2447	0.0839	0.0723
0.0942	0.1016	0.0976	0.2540	0.0987	0.0971
0.1084	0.1137	0.1110	0.2598	0.1088	0.1140
0.1186	0.1224	0.1207	0.2638	0.1160	0.1260
0.1615	0.1583	0.1609	0.2785	0.1462	0.1751
0.1918	0.1838	0.1895	0.2879	0.1678	0.2088
0.2094	0.1986	0.2060	0.2930	0.1805	0.2278
0.2336	0.2191	0.2288	0.2998	0.1983	0.2536
0.2373	0.2222	0.2323	0.3008	0.2010	0.2575
0.2583	0.2403	0.2523	0.3065	0.2168	0.2796
0.3219	0.2957	0.3129	0.3230	0.2668	0.3445
0.3245	0.2980	0.3154	0.3236	0.2689	0.3471
0.3269	0.3002	0.3177	0.3242	0.2709	0.3495
0.3763	0.3447	0.3654	0.3366	0.3126	0.3984
0.4214	0.3865	0.4093	0.3479	0.3529	0.4419
0.4595	0.4228	0.4469	0.3575	0.3891	0.4783
0.4701	0.4331	0.4574	0.3602	0.3995	0.4883
0.5073	0.4698	0.4945	0.3698	0.4372	0.5233
0.5126	0.4751	0.4998	0.3712	0.4427	0.5283
0.5602	0.5237	0.5478	0.3839	0.4944	0.5725
0.5760	0.5401	0.5638	0.3883	0.5122	0.5871
0.5864	0.5511	0.5744	0.3912	0.5242	0.5967
0.5890	0.5538	0.5771	0.3919	0.5273	0.5991
0.6070	0.5731	0.5955	0.3971	0.5486	0.6157
0.6070	0.5731	0.5955	0.3971	0.5486	0.6157
0.6424	0.6116	0.6320	0.4077	0.5920	0.6482
0.7362	0.7184	0.7299	0.4395	0.7170	0.7342
0.7616	0.7485	0.7569	0.4495	0.7530	0.7577
0.8293	0.8306	0.8289	0.4809	0.8508	0.8208
0.8377	0.8408	0.8378	0.4854	0.8627	0.8287
0.8409	0.8448	0.8413	0.4873	0.8674	0.8318
0.8668	0.8766	0.8690	0.5031	0.9033	0.8565
0.9092	0.9273	0.9139	0.5358	0.9556	0.8979
0.9180	0.9374	0.9232	0.5443	0.9648	0.9067
0.9396	0.9611	0.9456	0.5694	0.9836	0.9289
0.9745	0.9918	0.9801	0.6373	0.9990	0.9668
0.9853	0.9976	0.9898	0.6793	0.9999	0.9796

Para una duración de 30 minutos.

Tabla 8. Probabilidad de excedencia teórica para un $d=30\text{min}$.

I _{max} 30					
Normal	Gamma	Pearson	Exponencial	Gumbel	GEV
0.0460	0.0581	0.0532	0.2358	0.0626	0.0333
0.0513	0.0632	0.0585	0.2391	0.0669	0.0401
0.0994	0.1059	0.1037	0.2621	0.1024	0.1017
0.1008	0.1071	0.1050	0.2626	0.1034	0.1034
0.1194	0.1230	0.1220	0.2696	0.1166	0.1267
0.1248	0.1276	0.1270	0.2715	0.1204	0.1334
0.1248	0.1276	0.1270	0.2715	0.1204	0.1334
0.1475	0.1469	0.1478	0.2790	0.1363	0.1610
0.1868	0.1802	0.1837	0.2909	0.1642	0.2071
0.2264	0.2139	0.2200	0.3018	0.1929	0.2517
0.2345	0.2209	0.2275	0.3039	0.1990	0.2606
0.2685	0.2503	0.2589	0.3126	0.2246	0.2974
0.2819	0.2620	0.2714	0.3159	0.2350	0.3115
0.2938	0.2724	0.2824	0.3188	0.2442	0.3239
0.3124	0.2889	0.2999	0.3233	0.2591	0.3432
0.3433	0.3165	0.3290	0.3307	0.2844	0.3745
0.3798	0.3498	0.3638	0.3393	0.3156	0.4108
0.4085	0.3766	0.3915	0.3461	0.3412	0.4388
0.4600	0.4256	0.4417	0.3582	0.3895	0.4878
0.4849	0.4500	0.4664	0.3642	0.4143	0.5112
0.5201	0.4850	0.5015	0.3728	0.4506	0.5436
0.5201	0.4850	0.5015	0.3728	0.4506	0.5436
0.5413	0.5065	0.5230	0.3781	0.4734	0.5630
0.5834	0.5502	0.5659	0.3889	0.5208	0.6011
0.6466	0.6181	0.6316	0.4063	0.5973	0.6576
0.6545	0.6268	0.6399	0.4086	0.6073	0.6646
0.7205	0.7013	0.7103	0.4292	0.6952	0.7230
0.7205	0.7013	0.7103	0.4292	0.6952	0.7230
0.7636	0.7516	0.7569	0.4446	0.7559	0.7611
0.7636	0.7516	0.7569	0.4446	0.7559	0.7611
0.7718	0.7612	0.7658	0.4478	0.7676	0.7684
0.8172	0.8157	0.8157	0.4671	0.8334	0.8090
0.8377	0.8404	0.8382	0.4771	0.8627	0.8275
0.8535	0.8596	0.8557	0.4856	0.8851	0.8419
0.8947	0.9089	0.9008	0.5119	0.9390	0.8803
0.9521	0.9719	0.9615	0.5710	0.9914	0.9374
0.9630	0.9818	0.9721	0.5894	0.9961	0.9492
0.9742	0.9905	0.9826	0.6149	0.9989	0.9620
0.9742	0.9905	0.9826	0.6149	0.9989	0.9620

Para una duración de 60 minutos.

Tabla 9. Probabilidad de excedencia teórica para un d=60min.

Imax 60					
Normal	Gamma	Pearson	Exponencial	Gumbel	GEV
0.0147	0.0261	0.0179	0.2038	0.0338	0.0183
0.0262	0.0388	0.0300	0.2174	0.0455	0.0323
0.0743	0.0841	0.0776	0.2487	0.0843	0.0851
0.0947	0.1019	0.0973	0.2577	0.0990	0.1059
0.0984	0.1051	0.1008	0.2593	0.1017	0.1096
0.0984	0.1051	0.1008	0.2593	0.1017	0.1096
0.1413	0.1416	0.1419	0.2749	0.1320	0.1517
0.1907	0.1833	0.1891	0.2902	0.1670	0.1988
0.1955	0.1873	0.1936	0.2916	0.1704	0.2032
0.2414	0.2263	0.2376	0.3041	0.2040	0.2461
0.3045	0.2813	0.2984	0.3203	0.2528	0.3047
0.3323	0.3060	0.3254	0.3271	0.2753	0.3304
0.3355	0.3088	0.3284	0.3279	0.2779	0.3334
0.3595	0.3305	0.3518	0.3337	0.2981	0.3556
0.4175	0.3842	0.4087	0.3477	0.3494	0.4097
0.4175	0.3842	0.4087	0.3477	0.3494	0.4097
0.4277	0.3938	0.4187	0.3501	0.3588	0.4193
0.4294	0.3954	0.4204	0.3506	0.3604	0.4209
0.4791	0.4433	0.4697	0.3627	0.4084	0.4678
0.5274	0.4915	0.5180	0.3748	0.4584	0.5140
0.5378	0.5020	0.5284	0.3775	0.4696	0.5239
0.5889	0.5551	0.5801	0.3910	0.5272	0.5736
0.5889	0.5551	0.5801	0.3910	0.5272	0.5736
0.6048	0.5720	0.5963	0.3954	0.5460	0.5893
0.6198	0.5880	0.6115	0.3996	0.5640	0.6040
0.6222	0.5907	0.6141	0.4003	0.5670	0.6065
0.6272	0.5961	0.6191	0.4017	0.5730	0.6114
0.6936	0.6700	0.6874	0.4220	0.6586	0.6783
0.7446	0.7289	0.7404	0.4397	0.7289	0.7308
0.7590	0.7459	0.7554	0.4451	0.7493	0.7459
0.7677	0.7562	0.7644	0.4485	0.7618	0.7550
0.7970	0.7912	0.7951	0.4608	0.8041	0.7860
0.8623	0.8705	0.8636	0.4944	0.8972	0.8565
0.9007	0.9165	0.9037	0.5213	0.9461	0.8987
0.9277	0.9473	0.9317	0.5463	0.9739	0.9285
0.9362	0.9565	0.9405	0.5560	0.9810	0.9378
0.9389	0.9593	0.9432	0.5593	0.9830	0.9408
0.9415	0.9620	0.9458	0.5626	0.9849	0.9436
0.9645	0.9836	0.9689	0.6001	0.9966	0.9684

Para una duración de 120 minutos.

Tabla 10. Probabilidad de excedencia teórica para un $d=120$ min.

I _{max} 120					
Normal	Gamma	Pearson	Exponencial	Gumbel	GEV
0.0015	0.0070	0.0053	0.1439	0.0123	0.0022
0.0871	0.0960	0.0945	0.2397	0.0936	0.0950
0.0871	0.0960	0.0945	0.2397	0.0936	0.0950
0.0876	0.0964	0.0950	0.2399	0.0939	0.0955
0.1156	0.1199	0.1195	0.2522	0.1139	0.1218
0.1307	0.1324	0.1327	0.2582	0.1245	0.1357
0.1487	0.1472	0.1482	0.2649	0.1372	0.1521
0.1571	0.1541	0.1554	0.2679	0.1431	0.1598
0.2093	0.1971	0.2005	0.2851	0.1804	0.2070
0.2383	0.2212	0.2258	0.2939	0.2017	0.2332
0.3347	0.3038	0.3118	0.3215	0.2772	0.3210
0.3489	0.3164	0.3248	0.3255	0.2891	0.3342
0.3489	0.3164	0.3248	0.3255	0.2891	0.3342
0.3622	0.3282	0.3370	0.3292	0.3004	0.3465
0.4742	0.4328	0.4436	0.3605	0.4036	0.4530
0.4742	0.4328	0.4436	0.3605	0.4036	0.4530
0.4742	0.4328	0.4436	0.3605	0.4036	0.4530
0.4962	0.4543	0.4652	0.3668	0.4257	0.4744
0.5000	0.4581	0.4691	0.3679	0.4297	0.4782
0.5129	0.4710	0.4820	0.3717	0.4431	0.4909
0.5258	0.4839	0.4949	0.3755	0.4567	0.5037
0.5515	0.5102	0.5211	0.3832	0.4847	0.5294
0.5618	0.5208	0.5316	0.3864	0.4961	0.5397
0.5719	0.5315	0.5422	0.3895	0.5076	0.5500
0.6022	0.5637	0.5739	0.3992	0.5428	0.5809
0.6096	0.5718	0.5818	0.4016	0.5518	0.5886
0.6943	0.6669	0.6741	0.4318	0.6595	0.6781
0.7144	0.6905	0.6967	0.4398	0.6868	0.6999
0.7253	0.7034	0.7090	0.4443	0.7019	0.7118
0.7253	0.7034	0.7090	0.4443	0.7019	0.7118
0.7360	0.7162	0.7212	0.4489	0.7168	0.7235
0.8260	0.8272	0.8259	0.4946	0.8461	0.8242
0.8572	0.8666	0.8627	0.5152	0.8902	0.8597
0.8644	0.8756	0.8712	0.5205	0.9000	0.8678
0.8844	0.9005	0.8947	0.5366	0.9263	0.8905
0.8906	0.9082	0.9018	0.5421	0.9340	0.8975
0.9398	0.9648	0.9567	0.6004	0.9837	0.9516
0.9597	0.9834	0.9763	0.6383	0.9949	0.9717
0.9686	0.9902	0.9841	0.6615	0.9978	0.9800

Test de kolmogorov: Hacemos uso del programa “TestKolmogorov” para calcular el delta teórico.

Tabla 11. Delta teórico.

Duración	FPE / FPT	DELTA TEÓRICO Dt					
		Normal	Gamma	Pearson	Exponencial	Gumbel	GEV
Imax5	Hazen	0.1032	0.1388	0.1218	0.3840	0.1669	0.0851
	Weibull	0.0987	0.1343	0.1173	0.3738	0.1624	0.0806
	Chegodayev	0.1013	0.1370	0.1200	0.3799	0.1650	0.0833
	Blom	0.1020	0.1376	0.1207	0.3814	0.1657	0.0840
	Tukey	0.1016	0.1373	0.1203	0.3805	0.1653	0.0836
	Gringorten	0.1026	0.1382	0.1213	0.3828	0.1663	0.0845
Imax10	Hazen	0.0725	0.1064	0.0839	0.3665	0.1309	0.0638
	Weibull	0.0680	0.1019	0.0795	0.3557	0.1264	0.0593
	Chegodayev	0.0706	0.1046	0.0821	0.3620	0.1291	0.0620
	Blom	0.0713	0.1053	0.0828	0.3637	0.1297	0.0626
	Tukey	0.0709	0.1049	0.0824	0.3628	0.1294	0.0623
	Gringorten	0.0719	0.1059	0.0834	0.3651	0.1303	0.0632
Imax30	Hazen	0.0594	0.0829	0.0719	0.3734	0.1131	0.0435
	Weibull	0.0626	0.0861	0.0751	0.3644	0.1159	0.0480
	Chegodayev	0.0607	0.0842	0.0732	0.3698	0.1141	0.0454
	Blom	0.0602	0.0837	0.0727	0.3711	0.1137	0.0447
	Tukey	0.0605	0.0840	0.0730	0.3704	0.1139	0.0451
	Gringorten	0.0598	0.0833	0.0723	0.3723	0.1134	0.0441
Imax60	Hazen	0.0523	0.0834	0.0604	0.3989	0.1064	0.0681
	Weibull	0.0527	0.0789	0.0567	0.3874	0.1020	0.0636
	Chegodayev	0.0505	0.0816	0.0586	0.3943	0.1046	0.0663
	Blom	0.0512	0.0823	0.0593	0.3960	0.1053	0.0670
	Tukey	0.0508	0.0819	0.0589	0.3950	0.1049	0.0666
	Gringorten	0.0518	0.0829	0.0598	0.3975	0.1059	0.0676
Imax120	Hazen	0.1024	0.0821	0.0720	0.3681	0.1021	0.0812
	Weibull	0.0992	0.0782	0.0686	0.3579	0.0982	0.0780
	Chegodayev	0.1011	0.0805	0.0705	0.3640	0.1005	0.0799
	Blom	0.1016	0.0811	0.0711	0.3655	0.1011	0.0803
	Tukey	0.1013	0.0808	0.0707	0.3646	0.1008	0.0801
	Gringorten	0.1020	0.0816	0.0716	0.3669	0.1016	0.0808

Calculamos el delta crítico.

Usamos un modelo matemático ajustado a los valores del delta crítico, encontrado en tablas.

$$Dc = (12.5960 \alpha^2 - 4.527\alpha + 1.354)(N)^{(-0.012\ln(\alpha) - 0.492)}$$

Donde:

Dc: Delta crítico.

α : Nivel Significativo.

N: Número de datos.

Para $N=39$ y $\alpha=0.05$

$$Dc = (12.5960 \cdot 0.05^2 - 4.527(0.05) + 1.354)(39)^{(-0.012 \ln(0.05) - 0.492)}$$

$$Dc = 0.218$$

Criterio de decisión

De la tabla Tabla 11 y el Dc inferimos los siguiente.

Elección de la Distribución de probabilidad empírica

El menor delta teórico (Dt) que se obtiene en las intensidades máximas de lluvia para una duración de 5,10,120 minutos pertenece a la distribución de probabilidad empírica Weibull. Las intensidades máximas de lluvia para una duración de 30,60 minutos obedecen a una distribución de probabilidad empírica Hazen y Chegodayev respectivamente. Por consiguiente, se opta por escoger la distribución de probabilidad que tenga más intervenciones en las series de intensidades máximas de lluvia, en este caso la distribución de probabilidad empírica de Weibull.

Definimos

Probabilidad de excedencia Weibull

$$P(X \geq x) = \frac{m}{n + 1}$$

Elección de la Distribución de probabilidad teórica

Por tener un delta teórico (Dt) menor al delta crítico (Dc) a un nivel de significancia $\alpha=0.05$, podemos observar que las distribuciones de probabilidad Normal, Gamma, Pearson se aceptan según el test de Kolmogorov, por consiguiente, se opta por escoger la distribución de probabilidad teórica que tenga el menor delta teórico y el que tenga más incidencia en las series de intensidades. En este caso la distribución de probabilidad Normal se ajusta a las intensidades máximas de lluvia para duraciones de 5,10,30,60,120 minutos con el menor delta teórico (Dt).

Haremos uso del programa “graficasTK” para graficar los resultados del test de kolmogorov de la distribución de probabilidad Normal, Gumbel, GEV.

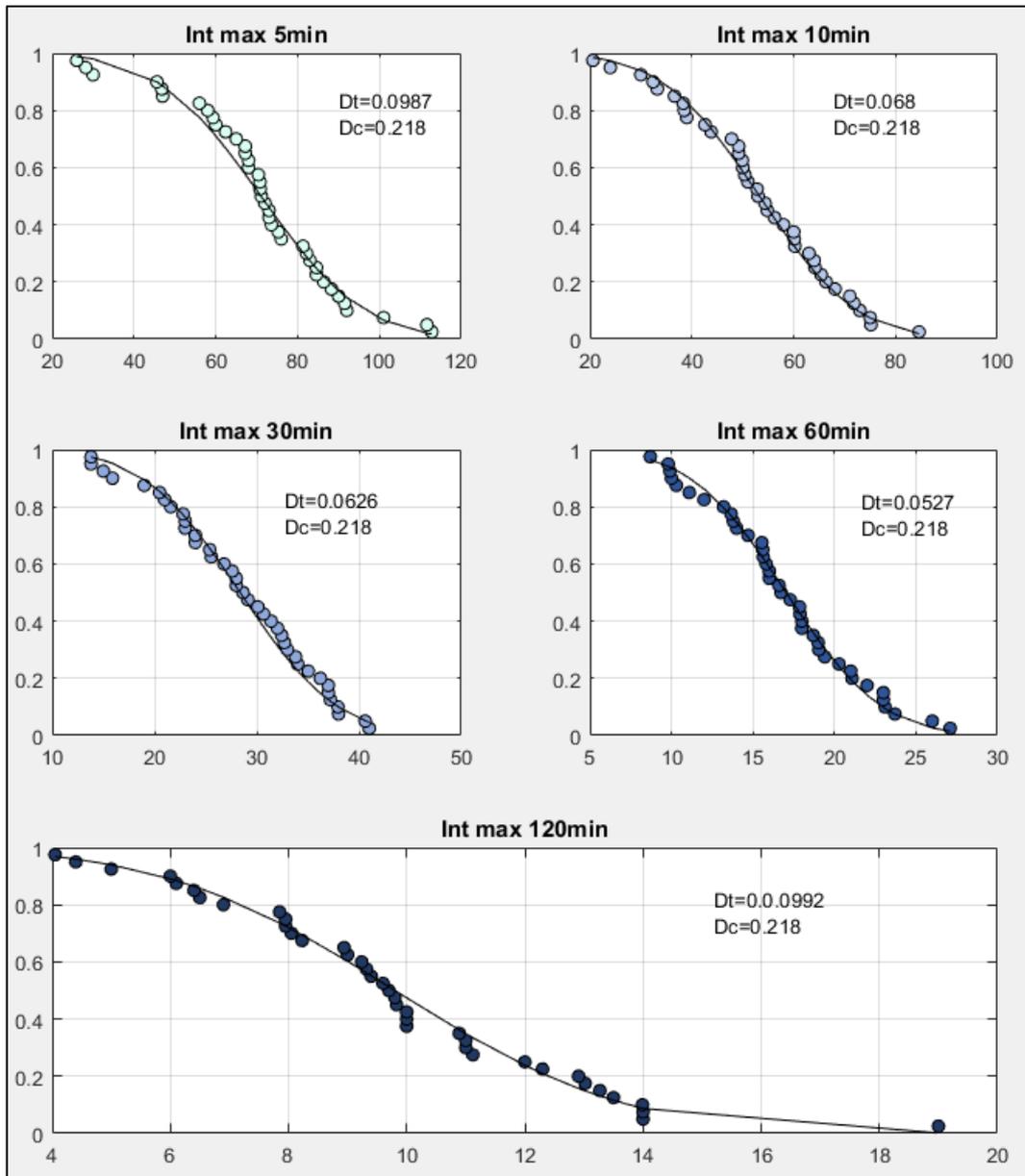


Gráfico 7. Test de Kolmogorov para una distribución Normal.

Definimos

Distribución de probabilidad Normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2}$$

Cálculo de parámetros con el método de los momentos Pesados. Utilizamos el programa “MomentP”.

	Momentos Pesados	
	μ	σ
Imax5	71.03	19.88
Ima10	53.27	15.00
Imax30	28.38	7.49
Imax60	17.04	4.62
Imax120	9.80	3.09

Cálculo de parámetros con el método de los momentos Lineales. Utilizamos el programa “MomentL”.

	Momentos Lineales	
	μ	σ
Imax5	71.03	19.62
Ima10	53.27	15.29
Imax30	28.38	7.68
Imax60	17.04	4.71
Imax120	9.80	3.08

Observamos que el primer parámetro μ es el promedio, y es el mismo para cualquiera de los dos métodos, el segundo parámetro es la desviación estándar σ , y varía según el método, aunque se esperó que estos valores sean menores que los calculados con el método de los momentos pesados, resultó lo contrario en algunos casos. Más adelante al reemplazar estos datos en las ecuaciones IDT y reproducir la muestra podremos saber cuál es el mejor.

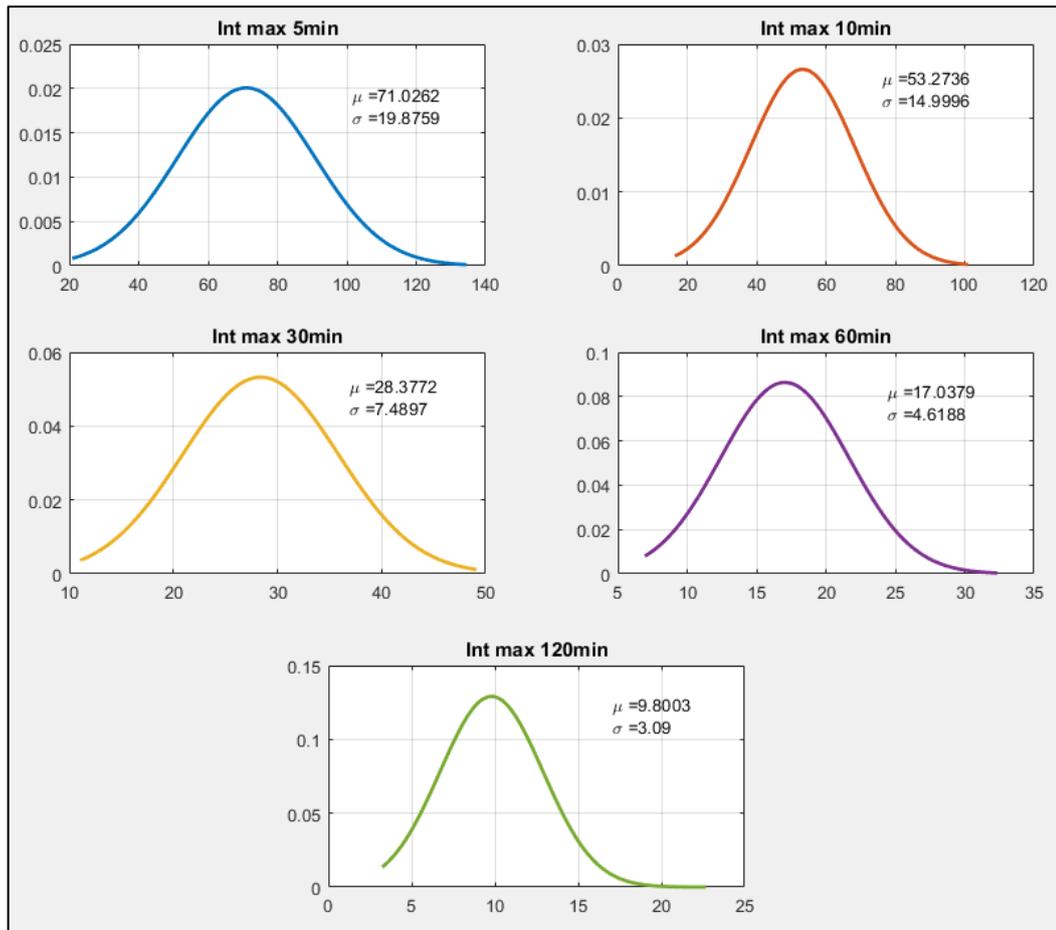


Gráfico 8. Función de densidad de probabilidad Normal.

Elección de la distribución de Probabilidad de Valores Extremos

Como las series de intensidades máximas de lluvia para duraciones de 5,10,30,60,120 minutos se ajustan a una distribución de probabilidad Normal, las series convergen a la distribución de valor extremo tipo I o Gumbel.

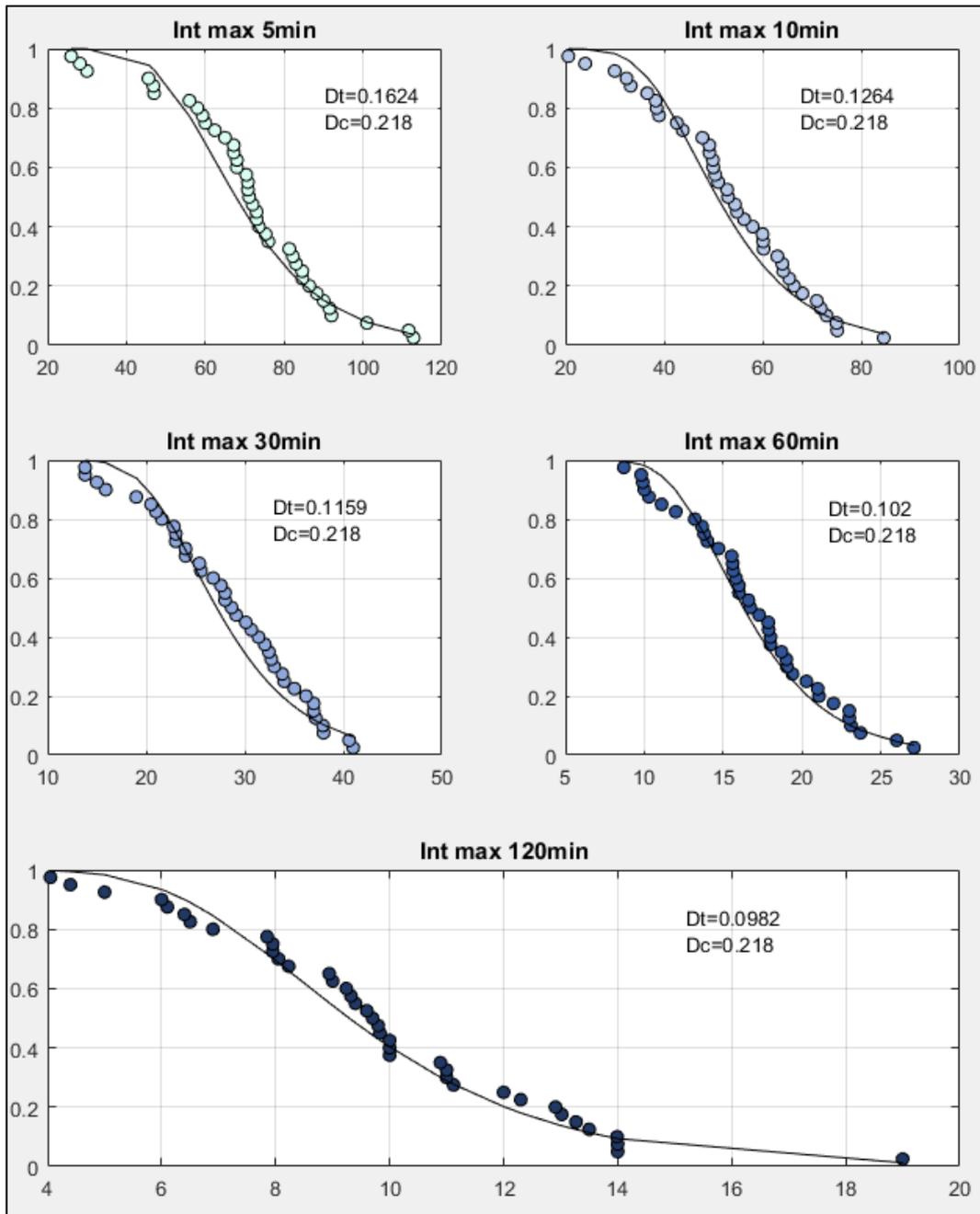


Gráfico 9. Test de Kolmogorov para una distribución Gumbel.

Definimos

Distribución de valor extremo tipo I

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} - e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

Cálculo de parámetros con el método de los momentos Pesados. Utilizamos el programa “MomentP”.

	Momentos Pesados	
	σ	μ
Imax5	15.4972	62.0812
Ima10	11.6951	46.5232
Imax30	5.8397	25.0065
Imax60	3.6013	14.9593
Imax120	2.4093	8.4097

Cálculo de parámetros con el método de los momentos Lineales. Utilizamos el programa “MomentL”.

	Momentos Lineales			
	L1	L2	σ	μ
Imax5	71.03	11.07	15.97	61.81
Ima10	53.27	8.63	12.45	46.09
Imax30	28.38	4.34	6.25	24.77
Imax60	17.04	2.66	3.83	14.82
Imax120	9.80	1.73	2.50	8.36

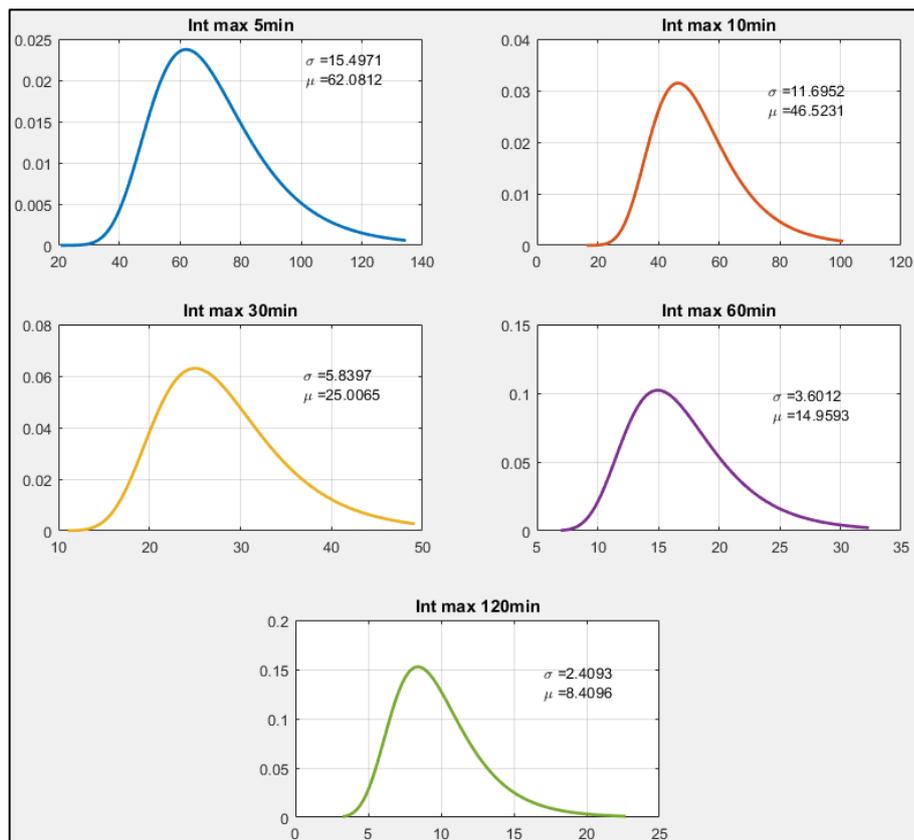


Gráfico 10. Función de densidad de probabilidad Gumbel

Función Generalizada de los Valores Extremos GEV

Nuestras series de intensidades máximas de lluvia tienen un coeficiente de asimetría cercano a cero, pero no es estrictamente cero. Los deltas teóricos (Dt) que se obtienen con el test de Kolmogorov visto en la tabla 11 son pequeños, por lo que, para nuestro propósito práctico de hallar el número mínimo de datos de una serie, vamos a proceder a ajustar nuestras series a este modelo probabilístico para compararlos con los demás modelos.

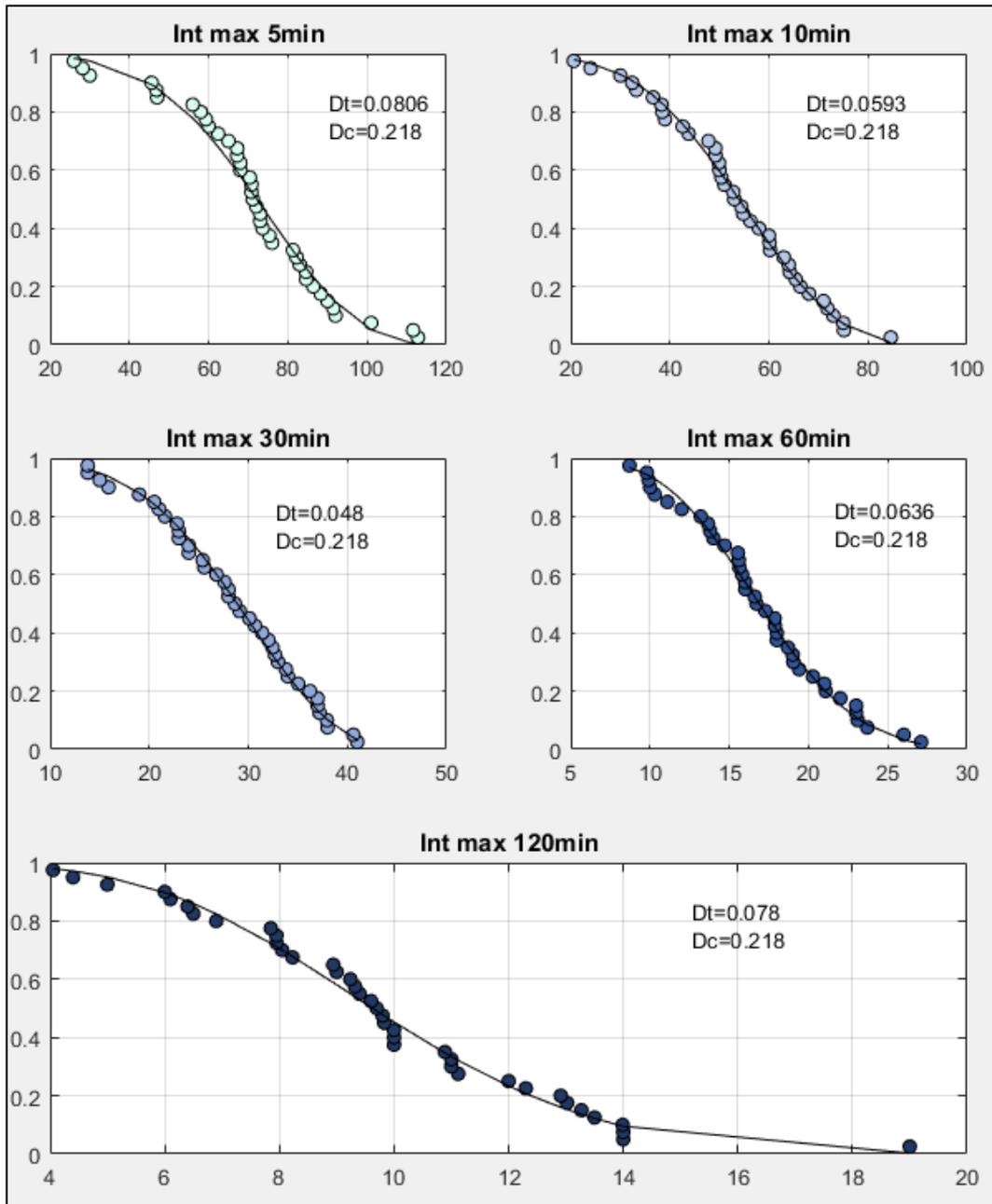


Gráfico 11. Test de Kolmogorov para una distribución GEV.

Definimos

Función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-\left(\frac{1}{\xi} + 1\right)} e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}}$$

Cálculo de parámetros con el método de los momentos Pesados. Utilizamos el programa “pdfGEV”.

	Momentos Pesados-Probabilidad		
	ξ	σ	μ
Imax5	-0.39	20.54	65.13
Ima10	-0.37	15.84	48.50
Imax30	-0.41	8.09	26.13
Imax60	-0.24	4.57	15.28
Imax120	-0.20	2.91	8.60

Inferimos

Según la teoría revisada, para $\xi < 0$ aplica a una distribución de Valor Extremo tipo III (colas cortas o suave), lo que se puede apreciar notablemente en nuestras series de datos de intensidades máximas de lluvia, pero que difiere de la conclusión dada por Fisher y Tippett (1928).

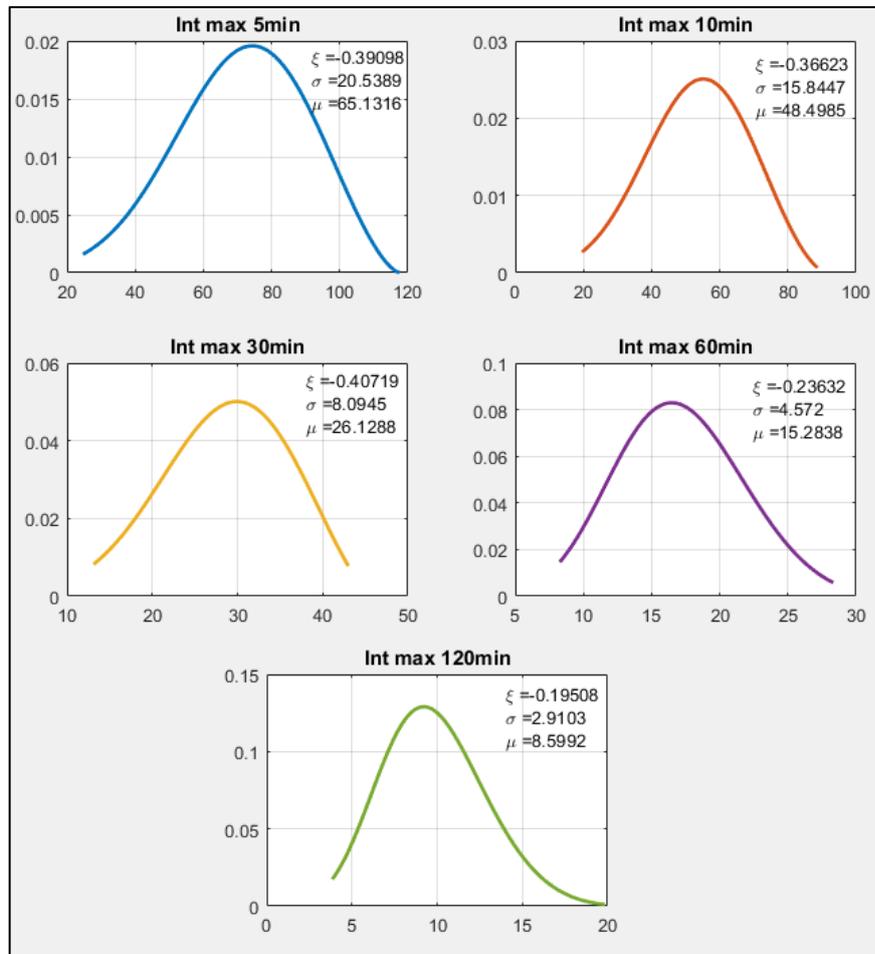


Gráfico 12. Función de densidad de probabilidad GEV.

Funciones inversas de las distribuciones de probabilidad

Inversa de la distribución de probabilidad Normal.

Como no hay una función explícita para determinar la inversa, se procede a evaluarlo numéricamente, usando la función “icdf” de Matlab, ecuación [47].

$$x = F^{-1} \left[\left(1 - \frac{1}{T} \right) \right]$$

Inversa de la distribución de probabilidad Gumbel, ecuación [82].

$$x = \mu - \sigma \ln \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right)$$

Inversa de la distribución de probabilidad GEV, ecuación [79].

$$x = \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left[\left(-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right)^{-\xi} - 1 \right]$$

Construcciones de curvas IDF a partir de las distribuciones de probabilidad

Distribución de probabilidad Normal

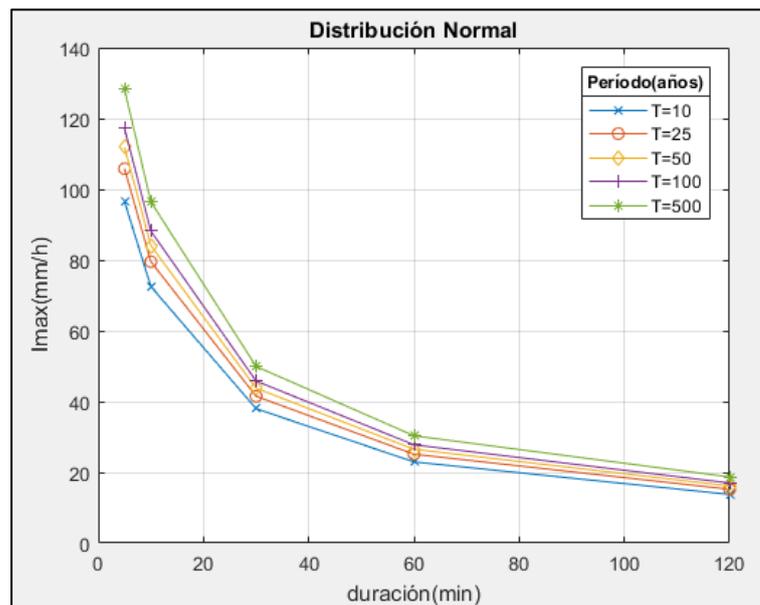


Gráfico 13. Curvas IDF, Distribución Normal.

Distribución de probabilidad Gumbel

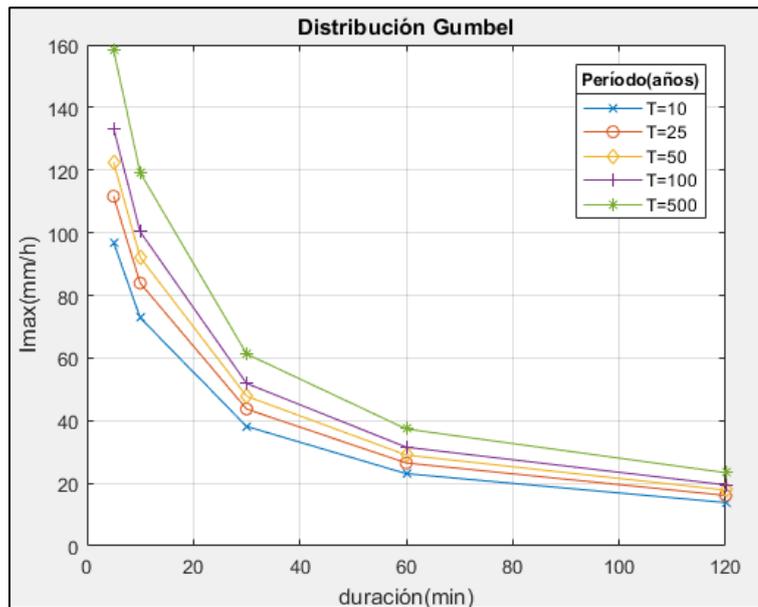


Gráfico 14. Curvas IDF, Distribución Gumbel.

Distribución de probabilidad GEV

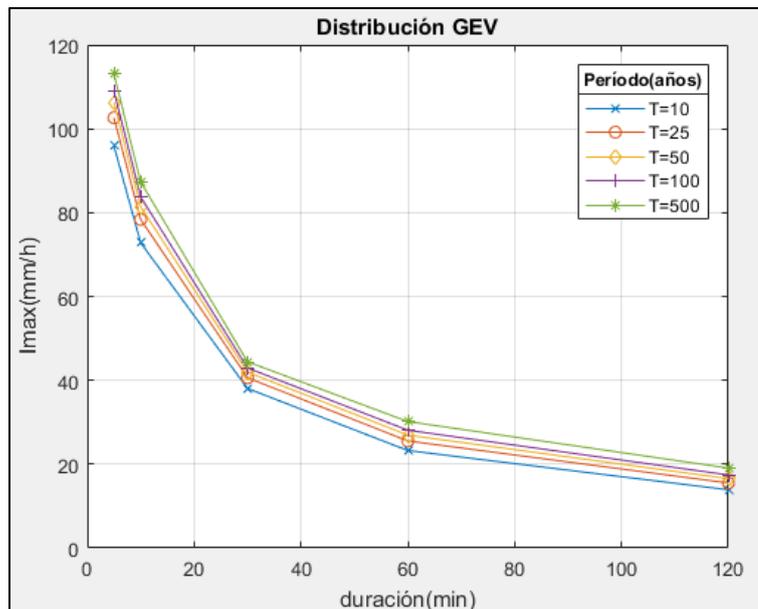


Gráfico 15. Curvas IDF, Distribución GEV.

Generalización de las curvas IDT

Vamos a proceder a ajustar nuestras series de intensidades máximas de lluvia para un número de datos $n \leq N$ a modelos matemáticos establecidos, utilizando métodos numéricos para el cálculo de los respectivos parámetros los cuales tienen una dependencia no lineal. Estas ecuaciones no son más, que las funciones inversas de las distribuciones

de probabilidad divididas entre una función de la duración. Conocida la intensidad de la lluvia, i , para la duración, d , y el período de retorno correspondiente, T , se resolvieron las ecuaciones de cada modelo utilizando el método de mínimos cuadrados, en el módulo de estimación no lineal del software Matlab v2017.

Ecuación Normal: La integral de la función de densidad de probabilidad normal para el intervalo $[-\infty, x]$ no tiene una solución matemática conocida, por ende, tampoco tiene una ecuación matemática para la función de probabilidad inversa. En este caso optamos por utilizar la función de Matlab “icdf” para obtener la función inversa y luego ajustamos los valores al siguiente modelo matemático.

$$I_{max} = \frac{F^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right)}{(d + \theta)^\eta}$$

Donde:

$F^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right)$: función inversa de la distribución Normal

d : duración en minutos.

θ, η : parámetros

Hacemos uso del programa “GraficaEcIDTNorm”, definidas las variables dependientes y los parámetros, procedemos a ajustar la Ec. Normal para un número de datos $n=39$ y graficamos.

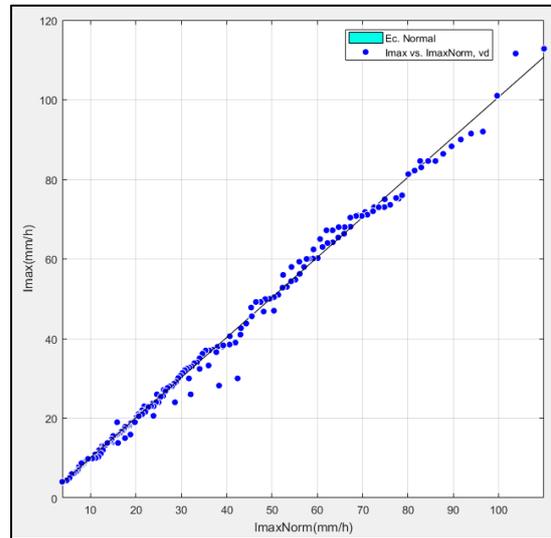
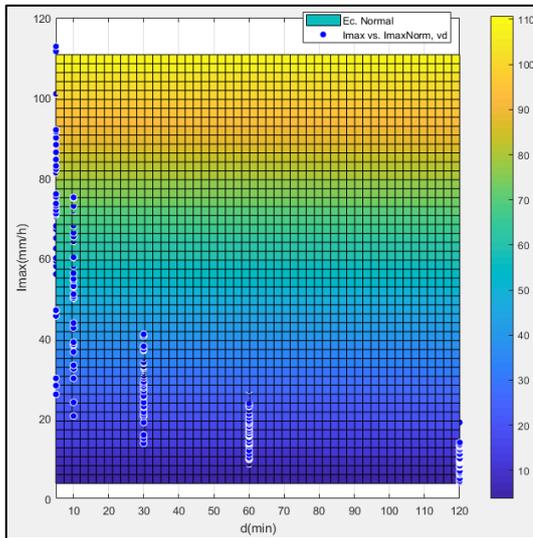
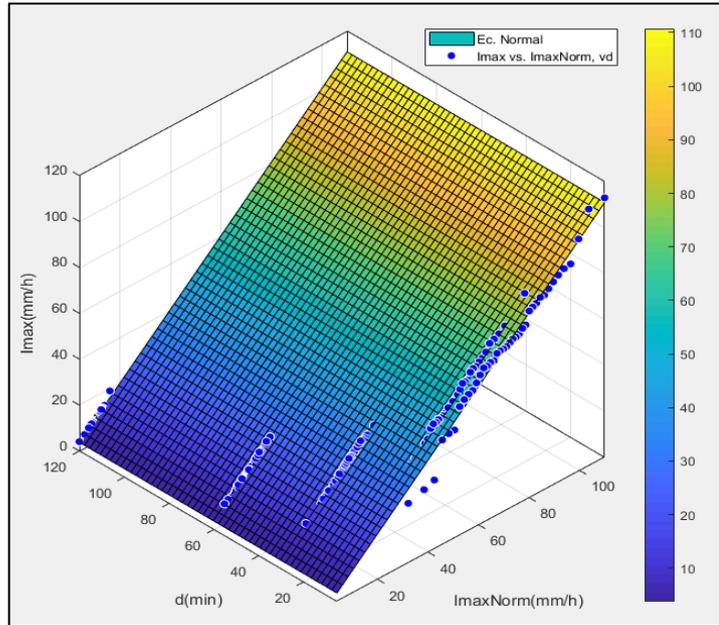


Gráfico 16. $I_{max}=f(I_{maxNorm},d)$.

Hacemos uso del programa “EcIDTNorm”, para obtener el cuadro de resultados de los parámetros de la ecuación Normal para un $n=4$ hasta $n=39$. En el tabla 12 podemos observar que los coeficientes de determinación de Pearson R^2 para las sub muestras, tienen un valor aceptable por encima del 98%, pero he aquí un pequeño detalle, si examinamos el parámetro η nos damos cuenta que se obtienen valores muy pequeños, por debajo de cero y del orden de $1e-3$ y el valor de θ se mantiene casi constante, esto nos hace concluir que la ecuación Normal sigue un modelo matemático lineal, es decir un plano en el espacio, lo que precisamente se observa en la gráfica. Por consiguiente, concluyo que la Ec. Normal, por no tener una ecuación inversa definida, no funciona para generalizar curvas IDT.

Tabla 12. Parámetros de la Ec. Normal.

<i>n</i>	θ	η	R2
4	1000.0	-0.0010	0.9910
5	1000.0	-0.0012	0.9878
6	1000.5	-0.0040	0.9890
7	1000.7	-0.0041	0.9866
8	1001.0	-0.0041	0.9866
9	1000.8	-0.0036	0.9875
10	1000.3	-0.0026	0.9904
11	1000.2	-0.0021	0.9927
12	1000.3	-0.0021	0.9939
13	1000.1	-0.0016	0.9943
14	1000.0	-0.0011	0.9959
15	1000.0	-0.0008	0.9961
16	1000.0	-0.0005	0.9957
17	1000.0	-0.0006	0.9958
18	1000.0	-0.0008	0.9953
19	1000.0	-0.0006	0.9952
20	1000.0	-0.0005	0.9961
21	1000.0	0.0003	0.9966
22	1000.0	-0.0003	0.9974
23	1000.0	-0.0003	0.9973
24	1000.0	0.0003	0.9977
25	1000.0	-0.0003	0.9976
26	1000.0	-0.0007	0.9979
27	1000.0	-0.0009	0.9978
28	1000.0	-0.0011	0.9977
29	1000.0	-0.0007	0.9978
30	1000.0	-0.0011	0.9978
31	1000.0	-0.0011	0.9976
32	1000.0	-0.0008	0.9980
33	1000.0	-0.0009	0.9981
34	1000.0	-0.0010	0.9979
35	1000.0	-0.0010	0.9980
36	1000.0	-0.0011	0.9979
37	1000.0	-0.0010	0.9980
38	1000.0	-0.0011	0.9983
39	1000.0	-0.0010	0.9983

Ecuación Koutsoyiannis: Esta ecuación es la función de probabilidad inversa de Gumbel dividida entre una función de la duración, a diferencia de la ecuación Normal, encontramos que tiene una ecuación explícita para el cálculo de la intensidad máxima en función del período de retorno, ecuación [139].

$$I_{max} = \frac{\psi - \lambda \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right)}{(d + \theta)^\eta}$$

Donde:

T : Período de retorno en años.

d : duración en minutos.

$\psi, \lambda, \theta, \eta$: parámetros

Hacemos uso del programa “GraficaEcIDTGumb”, definidas las variables dependientes y los parámetros procedemos a ajustar la Ec. Koutsoyiannis para un número de datos $n=39$ y graficamos.

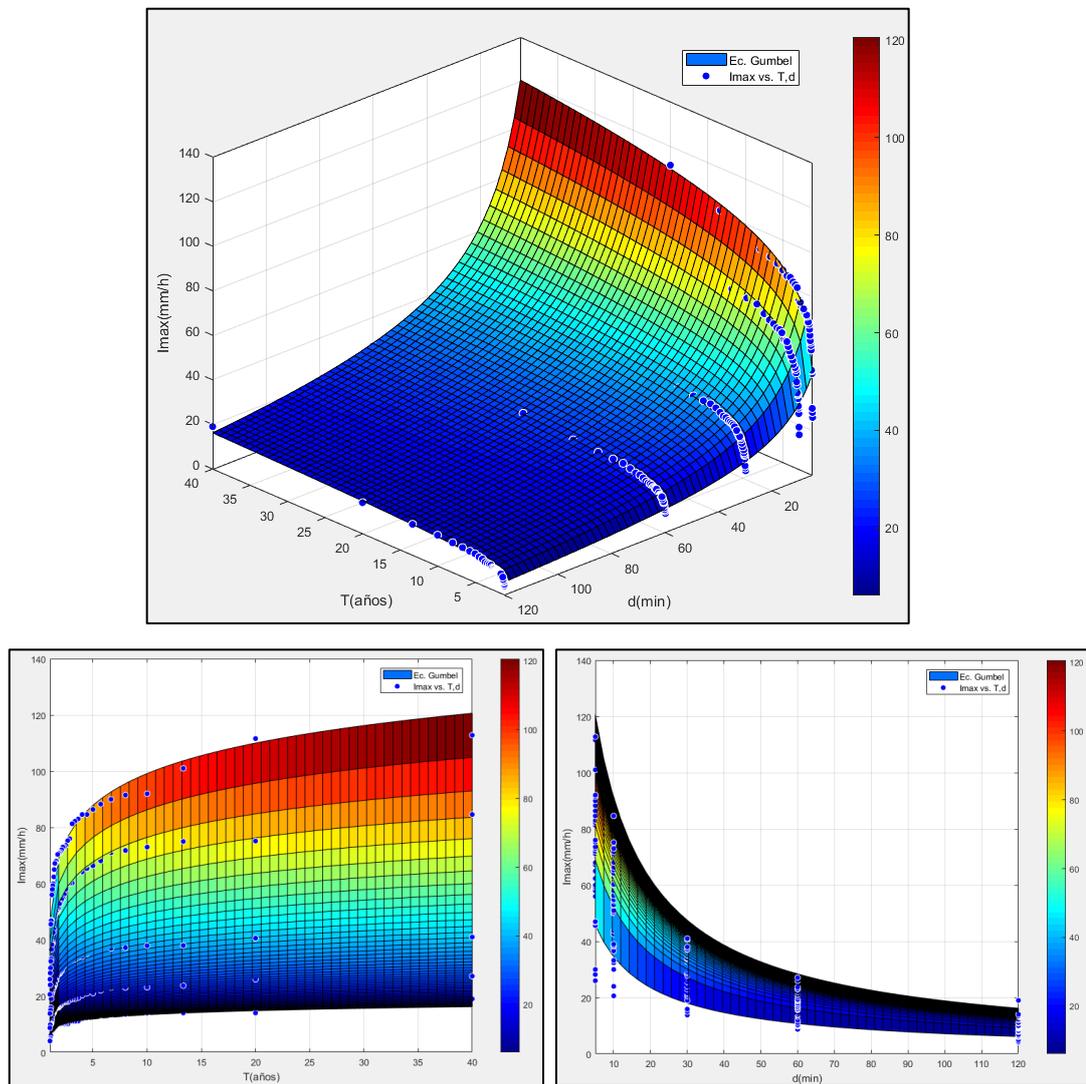


Gráfico 17. $I_{max}=f(T,d)$.

La tabla 13 muestra los valores de los parámetros de la ecuación de Koutsoyiannis y el grado de ajuste, determinado por el coeficiente de determinación Pearson (R^2P), para

cada sub muestra ($n \leq N$). Los coeficientes de determinación Pearson (R^2) se encuentran por encima del 98% y existe poca variabilidad de los valores de los parámetros, teniendo como valor máximo 14% y valor mínimo 4% para el coeficiente de variación (C_v).

Tabla 13. Parámetros de la Ec. Koutsoyiannis

n	ψ	λ	θ	η	R²
4	614.95	132.27	5.94	0.87	0.9939
5	486.63	104.79	5.76	0.80	0.9907
6	514.36	129.44	6.32	0.83	0.9795
7	610.45	150.37	8.72	0.85	0.9782
8	734.68	156.70	9.97	0.89	0.9782
9	754.25	146.71	10.27	0.89	0.9805
10	917.42	181.92	11.51	0.93	0.9845
11	681.19	128.83	9.58	0.86	0.9869
12	655.98	148.45	8.39	0.86	0.9893
13	712.77	167.33	9.15	0.88	0.9902
14	878.78	195.55	10.34	0.93	0.9919
15	774.50	165.00	9.22	0.91	0.9929
16	762.64	154.78	8.99	0.91	0.9931
17	726.45	133.85	8.67	0.90	0.9939
18	739.61	150.06	8.65	0.90	0.9946
19	809.35	161.45	9.40	0.91	0.9944
20	802.12	172.18	9.44	0.92	0.9944
21	814.74	176.25	9.77	0.92	0.9952
22	800.16	172.12	9.51	0.92	0.9952
23	819.31	170.36	9.66	0.92	0.9955
24	836.46	167.65	9.76	0.93	0.9958
25	989.30	194.19	10.83	0.96	0.9960
26	912.50	184.72	10.27	0.94	0.9962
27	856.56	170.55	9.81	0.93	0.9959
28	834.26	178.38	9.71	0.93	0.9962
29	806.96	168.47	9.55	0.92	0.9966
30	805.78	176.67	9.59	0.92	0.9957
31	731.87	162.76	8.89	0.91	0.9952
32	829.87	182.84	9.63	0.93	0.9955
33	797.91	184.89	9.43	0.93	0.9955
34	791.90	189.44	9.45	0.93	0.9952
35	828.88	191.66	9.80	0.94	0.9947
36	802.54	190.34	9.69	0.93	0.9949
37	808.48	188.91	9.83	0.93	0.9951
38	680.53	158.73	8.62	0.90	0.9952
39	672.87	154.97	8.61	0.89	0.9958
Cv	14%	13%	13%	4%	

Debido a que el cálculo del coeficiente de determinación Pearson como medida de correlación paramétrica, tiene poca variación para las sub muestras, optamos por verificar y comparar estos resultados con otras medidas de correlación no paramétricas, como Spearman y Kendall por tratarse de una ecuación para valores extremos.

La tabla 14 en la columna 1 muestra el grado de ajuste según Pearson, de la ecuación Koutsoyiannis para cada sub muestra ($n \leq N$). En la columna 2,3,4 se muestra el grado de ajuste según Pearson(R2P), Spearman(R2S), Kendall(R2K) de la muestra total $n=N$, donde los parámetros de dicha ecuación han sido calculados a partir de sub muestras y luego se ha reproducido toda la muestra.

Tabla 14. Variación de los coeficientes de determinación según Ec. Koutsoyiannis

n	submuestra	muestra		
	Pearson R2P	Pearson R2P	Spearman R2S	Kendall R2K
4	0.9939	0.9748	0.9791	0.8908
5	0.9907	0.9781	0.9822	0.9024
6	0.9795	0.9827	0.9873	0.9192
7	0.9782	0.9832	0.9882	0.9190
8	0.9782	0.9791	0.9837	0.9052
9	0.9805	0.9747	0.9802	0.8950
10	0.9845	0.9752	0.9809	0.8966
11	0.9869	0.9737	0.9797	0.8946
12	0.9893	0.9811	0.9849	0.9103
13	0.9902	0.9820	0.9860	0.9127
14	0.9919	0.9800	0.9838	0.9056
15	0.9929	0.9781	0.9817	0.8996
16	0.9931	0.9754	0.9795	0.8932
17	0.9939	0.9697	0.9757	0.8812
18	0.9946	0.9754	0.9796	0.8936
19	0.9944	0.9747	0.9792	0.8924
20	0.9944	0.9783	0.9818	0.8998
21	0.9952	0.9788	0.9824	0.9012
22	0.9952	0.9785	0.9822	0.9012
23	0.9955	0.9769	0.9806	0.8968
24	0.9958	0.9750	0.9794	0.8930
25	0.9960	0.9735	0.9784	0.8898
26	0.9962	0.9754	0.9799	0.8942
27	0.9959	0.9745	0.9790	0.8918
28	0.9962	0.9781	0.9819	0.9004
29	0.9966	0.9770	0.9806	0.8968
30	0.9957	0.9792	0.9826	0.9020

n	submuestra	muestra		
	Pearson R2P	Pearson R2P	Spearman R2S	Kendall R2K
31	0.9952	0.9797	0.9831	0.9038
32	0.9955	0.9792	0.9824	0.9012
33	0.9955	0.9810	0.9844	0.9073
34	0.9952	0.9819	0.9852	0.9101
35	0.9947	0.9809	0.9842	0.9068
36	0.9949	0.9817	0.9851	0.9095
37	0.9951	0.9814	0.9847	0.9083
38	0.9952	0.9814	0.9849	0.9101
39	0.9958	0.9811	0.9847	0.9093

En el gráfico 18 se observa la intensidad máxima de lluvia estimada mediante la ecuación de Koutsoyiannis versus la intensidad máxima de lluvia observada y se ha optado por calcular el coeficiente de determinación de Kendall(R2K) como medida de correlación no paramétrica.

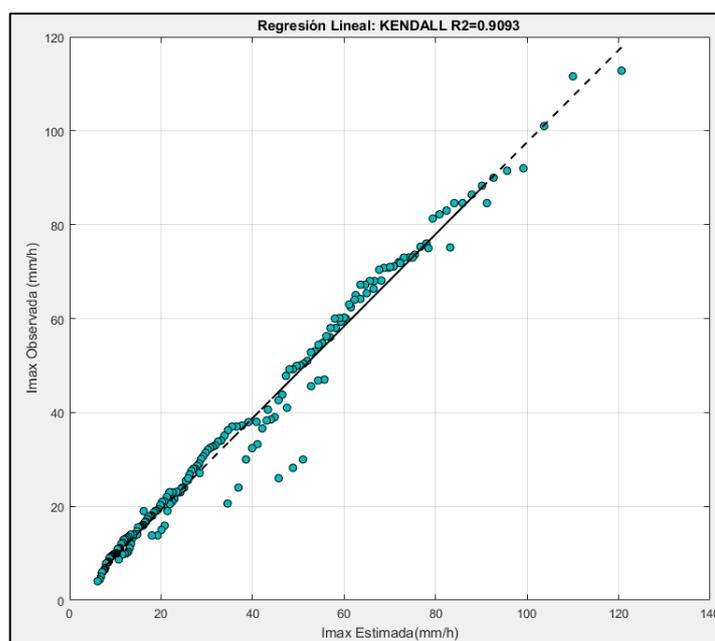


Gráfico 18. Imax estimada Vs Imax observada, Ec. Koutsoyiannis.

Encontramos que los valores de las intensidades máximas de lluvia estimadas con la ecuación de Koutsoyiannis aproximan a las intensidades máximas de lluvia observadas con un grado de ajuste del 90.93% según el coeficiente de determinación de Kendall.

En el gráfico 19 observamos la variación del coeficiente de determinación de Pearson, Spearman y Kendall según el número de datos empleados, para reproducir la muestra con $n=N$, se localiza fácilmente el número de datos de la sub muestra, que obtiene un buen

grado de ajuste, en este caso $n=13$, con un coeficiente de determinación aproximado a como si se hubiese empleado un $n \geq 34$, donde el coeficiente de determinación parece estabilizarse. Por ende, se concluye que el número de datos mínimos que se necesita para reproducir la muestra a partir de la ecuación de Koutsoyiannis, es 13 datos, lo que quiere decir que, en efecto, para realizar un análisis estadístico de una serie hidrológica de intensidades máximas de lluvia necesitaríamos al menos el doble del número mínimo de datos (nmd).

$$N = 2(\text{nmd})$$

$$N = 2(13) = 26 \text{ años}$$

Donde:

N : Número de años de registro.

nmd: Número mínimo de datos.

La razón por la cual se duplica el nmd, es que cuando pedimos información hidrológica, no se sabe el punto inicial en el que un evento máximo ha ocurrido, por consiguiente, para asegurarse de que al menos exista dos eventos máximos en la serie de datos y saber la tendencia, se duplica el número mínimo de datos. Esto se ilustra en la figura 27.

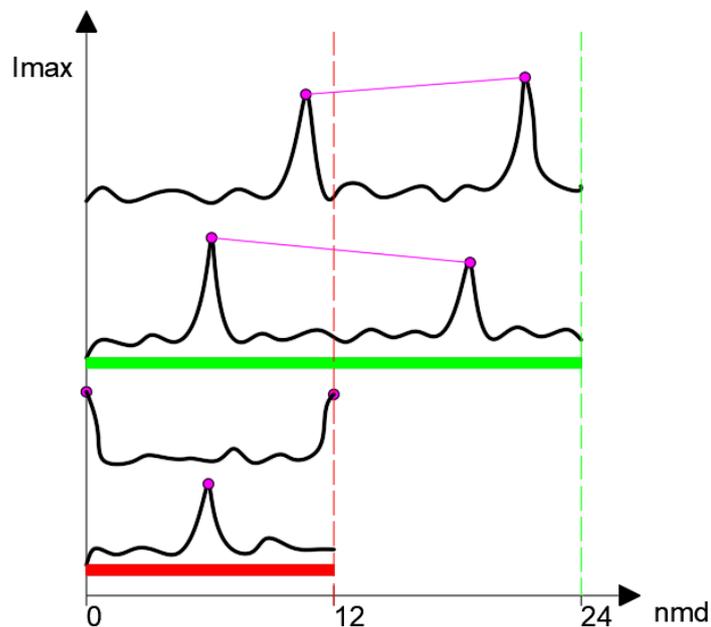


Figura 27. Ocurrencia de posibles eventos máximos en una serie de datos.

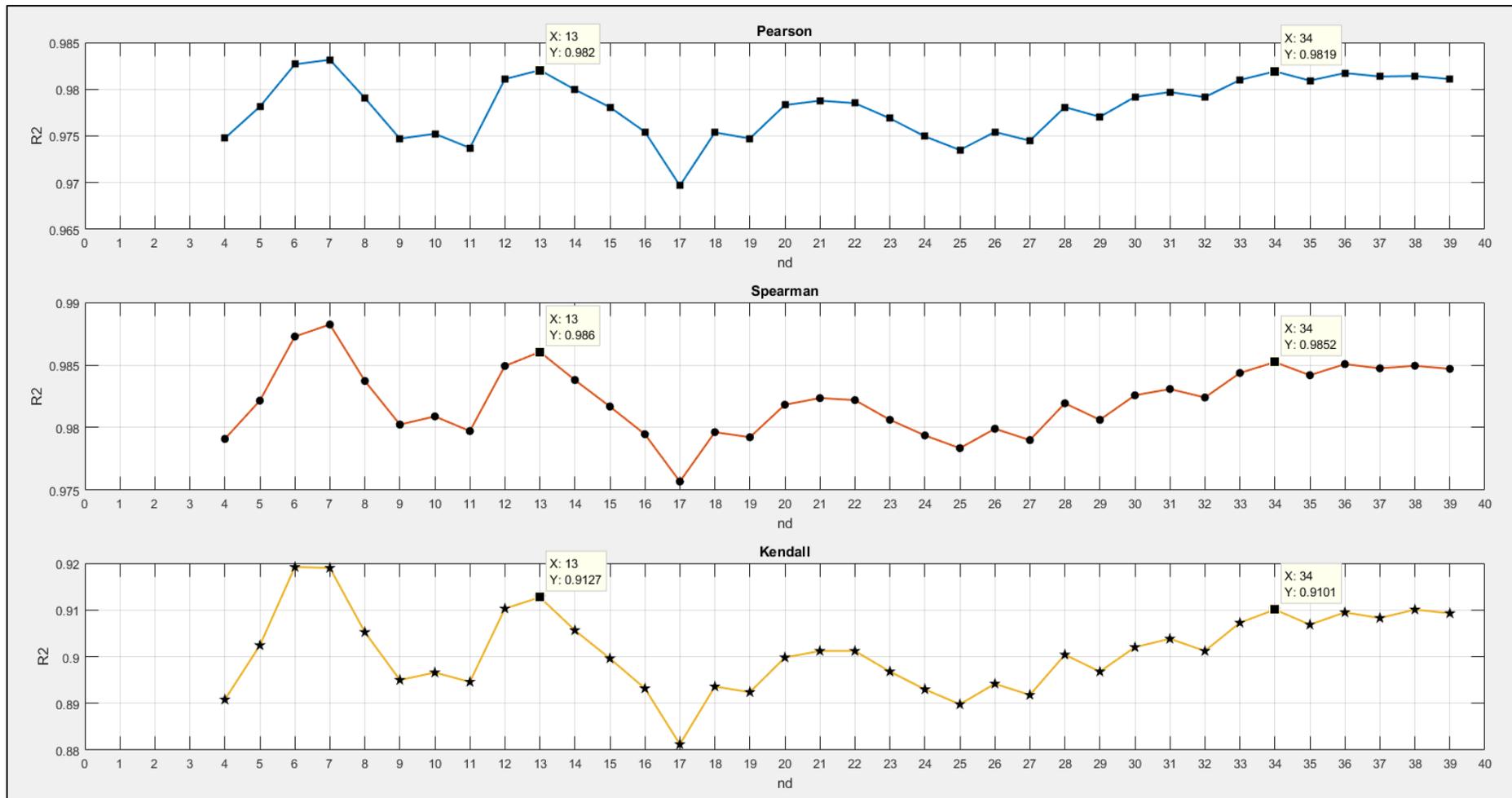


Gráfico 19. número de datos versus coeficiente de determinación R2, Ec. de Koutsoyiannis.

Ecuación GEV: Esta ecuación es la función de probabilidad inversa de GEV dividida entre una función de la duración, a diferencia de la Ec. Normal, encontramos que tiene una ecuación definida para el cálculo de la intensidad máxima en función del período de retorno.

$$I_{max} = \frac{\tau + \frac{\omega}{\gamma} \left[\left(-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right)^{-k} - 1 \right]}{(d + \theta)^\eta}$$

Donde:

T : Período de retorno en años.

d : duración en minutos.

$\tau, \omega, \gamma, k, \theta, \eta$: parámetros

Hacemos uso del programa “GraficaEcIDTGEV”, definidas las variables dependientes y los parámetros procedemos a ajustar la ecuación GEV para un número de datos $n=39$ y graficamos.

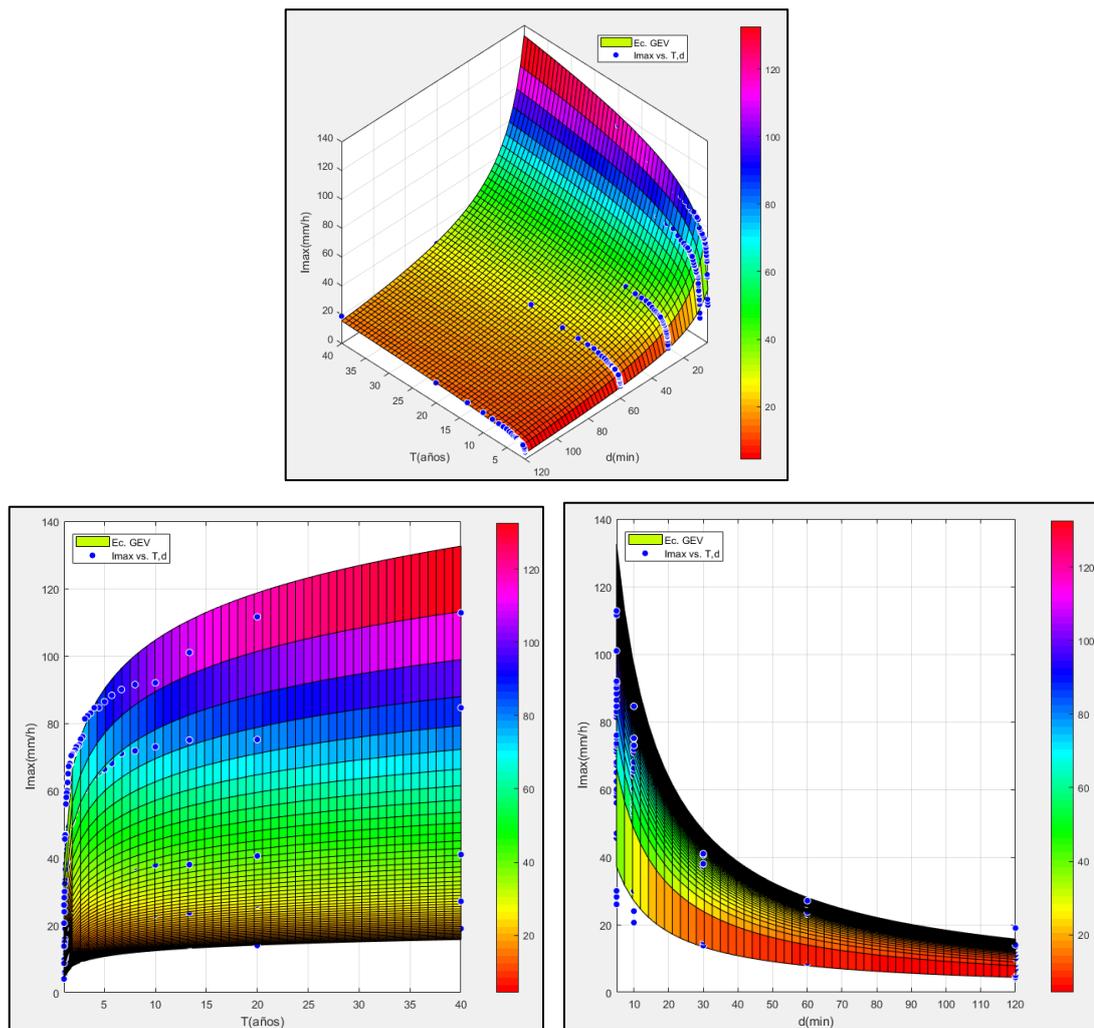


Gráfico 20. $I_{max}=f(T,d)$.

La tabla 15 muestra los valores de los parámetros de la ecuación GEV y el grado de ajuste, determinado por el coeficiente de determinación Pearson (R2P), para cada sub muestra ($n \leq N$). El coeficiente variación del parámetro ω , γ presenta valores exorbitantes, debido a algunos valores atípicos.

Tabla 15. Parámetros de la Ec. GEV.

n	τ	ω	γ	κ	θ	η	R2
4	558.03	100.07	-0.24	-0.32	5.18	0.85	0.9944
5	493.80	99.65	0.16	0.16	5.96	0.80	0.9907
6	473.74	702.65	-0.56	-0.10	5.78	0.81	0.9838
7	601.69	-314.85	0.14	-0.07	8.64	0.85	0.9815
8	1923.67	1886.26	-2.42	-0.59	18.09	1.08	0.9844
9	1263.51	1349.51	-1.55	-0.29	14.58	0.99	0.9831
10	872.66	2416.68	-1.69	-0.13	11.12	0.92	0.9863
11	657.56	63.41	-0.07	-0.14	9.24	0.85	0.9879
12	635.57	251.47	-0.64	-0.40	8.08	0.85	0.9902
13	904.17	38.45	-0.04	-0.20	11.20	0.93	0.9891
14	937.52	56.08	-0.07	-0.28	10.93	0.94	0.9913
15	809.24	238.50	-0.32	-0.24	9.63	0.91	0.9923
16	803.85	105.27	-0.10	-0.15	9.47	0.92	0.9919
17	731.16	110.60	-0.08	-0.10	8.76	0.90	0.9926
18	750.86	1191.89	0.21	0.03	8.77	0.90	0.9932
19	796.07	318.14	-0.04	-0.02	9.28	0.91	0.9935
20	752.15	132.13	-0.07	-0.09	8.96	0.90	0.9942
21	783.99	108.40	-0.10	-0.16	9.54	0.91	0.9949
22	726.07	-37409.07	52.79	-0.25	8.89	0.89	0.9959
23	736.45	103.74	-0.13	-0.21	8.92	0.90	0.9958
24	787.06	134.00	-0.17	-0.22	9.38	0.91	0.9960
25	920.65	100.26	-0.13	-0.26	10.39	0.94	0.9963
26	825.47	74.76	-0.10	-0.26	9.67	0.91	0.9965
27	763.00	122.05	-0.18	-0.26	9.06	0.90	0.9961
28	759.28	198.67	-0.40	-0.41	9.28	0.90	0.9969
29	729.89	128.68	-0.24	-0.36	9.12	0.89	0.9971
30	722.33	337.19	-0.69	-0.43	9.20	0.90	0.9969
31	734.51	104.00	-0.20	-0.41	9.37	0.90	0.9969
32	860.78	298.66	-0.47	-0.41	10.39	0.94	0.9973
33	852.16	64.73	-0.10	-0.39	10.25	0.94	0.9973
34	839.64	78.00	-0.13	-0.46	10.39	0.94	0.9973
35	905.88	225.49	-0.36	-0.48	11.00	0.95	0.9974
36	844.85	75.84	-0.12	-0.45	10.61	0.94	0.9977
37	866.57	104.13	-0.15	-0.44	10.99	0.94	0.9980
38	768.10	137.58	-0.23	-0.43	10.17	0.92	0.9983
39	735.92	107.79	-0.18	-0.41	9.97	0.91	0.9984
CV	29%	869%	772%	62%	22%	5%	

La tabla 16 en la columna 1 muestra el grado de ajuste según Pearson, de la ecuación GEV para cada sub muestra ($n \leq N$). En la columna 2,3,4 se muestra el grado de ajuste

según Pearson(R2P), Spearman(R2S), Kedall(R2K) de la muestra total n=N, donde los parámetros de dicha ecuación han sido calculados a partir de sub muestras y luego se ha reproducido toda la muestra.

Tabla 16. Variación de los coeficientes de determinación según GEV.

n	submuestra	muestra		
	Pearson R2P	Pearson R2P	Spearman R2S	Kendall R2K
4	0.9944	0.9770	0.9826	0.8914
5	0.9907	0.9702	0.9787	0.8926
6	0.9838	0.9874	0.9903	0.9343
7	0.9815	0.9868	0.9903	0.9275
8	0.9844	0.9752	0.9890	0.9168
9	0.9831	0.9710	0.9805	0.8932
10	0.9863	0.9808	0.9844	0.9068
11	0.9879	0.9795	0.9836	0.9032
12	0.9902	0.9836	0.9885	0.9166
13	0.9891	0.9788	0.9832	0.9010
14	0.9913	0.9788	0.9837	0.9012
15	0.9923	0.9782	0.9825	0.8962
16	0.9919	0.9738	0.9787	0.8868
17	0.9926	0.9705	0.9763	0.8798
18	0.9932	0.9742	0.9789	0.8916
19	0.9935	0.9756	0.9795	0.8936
20	0.9942	0.9822	0.9846	0.9087
21	0.9949	0.9832	0.9853	0.9093
22	0.9959	0.9857	0.9880	0.9168
23	0.9958	0.9823	0.9850	0.9060
24	0.9960	0.9795	0.9830	0.8988
25	0.9963	0.9778	0.9824	0.8960
26	0.9965	0.9790	0.9833	0.8990
27	0.9961	0.9805	0.9841	0.9012
28	0.9969	0.9871	0.9908	0.9259
29	0.9971	0.9878	0.9908	0.9271
30	0.9969	0.9916	0.9947	0.9437
31	0.9969	0.9922	0.9948	0.9447
32	0.9973	0.9926	0.9951	0.9454
33	0.9973	0.9925	0.9948	0.9433
34	0.9973	0.9937	0.9964	0.9546
35	0.9974	0.9934	0.9962	0.9522
36	0.9977	0.9938	0.9964	0.9540
37	0.9980	0.9938	0.9966	0.9559
38	0.9983	0.9941	0.9966	0.9575
39	0.9984	0.9942	0.9967	0.9586

En el gráfico 21 se observa la intensidad máxima de lluvia estimada mediante la ecuación GEV versus la intensidad máxima de lluvia observada y se ha optado por calcular el coeficiente de determinación de Kendall (R2K) como medida de determinación no paramétrica.

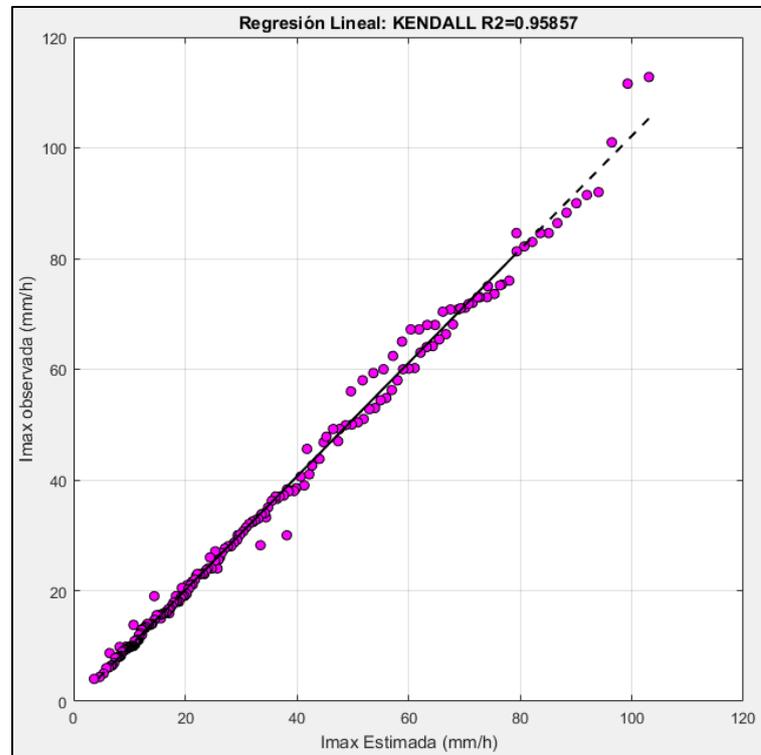


Gráfico 21. Imax estimada Vs Imax observada, Ec. GEV.

Encontramos que los valores de las intensidades máximas de lluvia estimadas con la ecuación GEV aproximan a las intensidades máximas de lluvia observadas con un grado de ajuste del 95.86% según el coeficiente de determinación de Kendal.

En el gráfico 22 observamos la variación del coeficiente de determinación Pearson, Spearman y Kendall según el número de datos empleados, para reproducir la muestra con $n=N$. El número de datos de la sub muestra, que obtiene un buen grado de ajuste es $n=12$ con un coeficiente de determinación aproximado a como si se hubiese empleado un $n \geq 22$, a partir de $n=30$ el coeficiente de determinación parece estabilizarse. Por consiguiente:

$$\aleph = 2(nmd)$$

$$\aleph = 2(12) = 24 \text{ años}$$

Donde:

\aleph : Número de años de registro.

nmd : Número mínimo de datos.

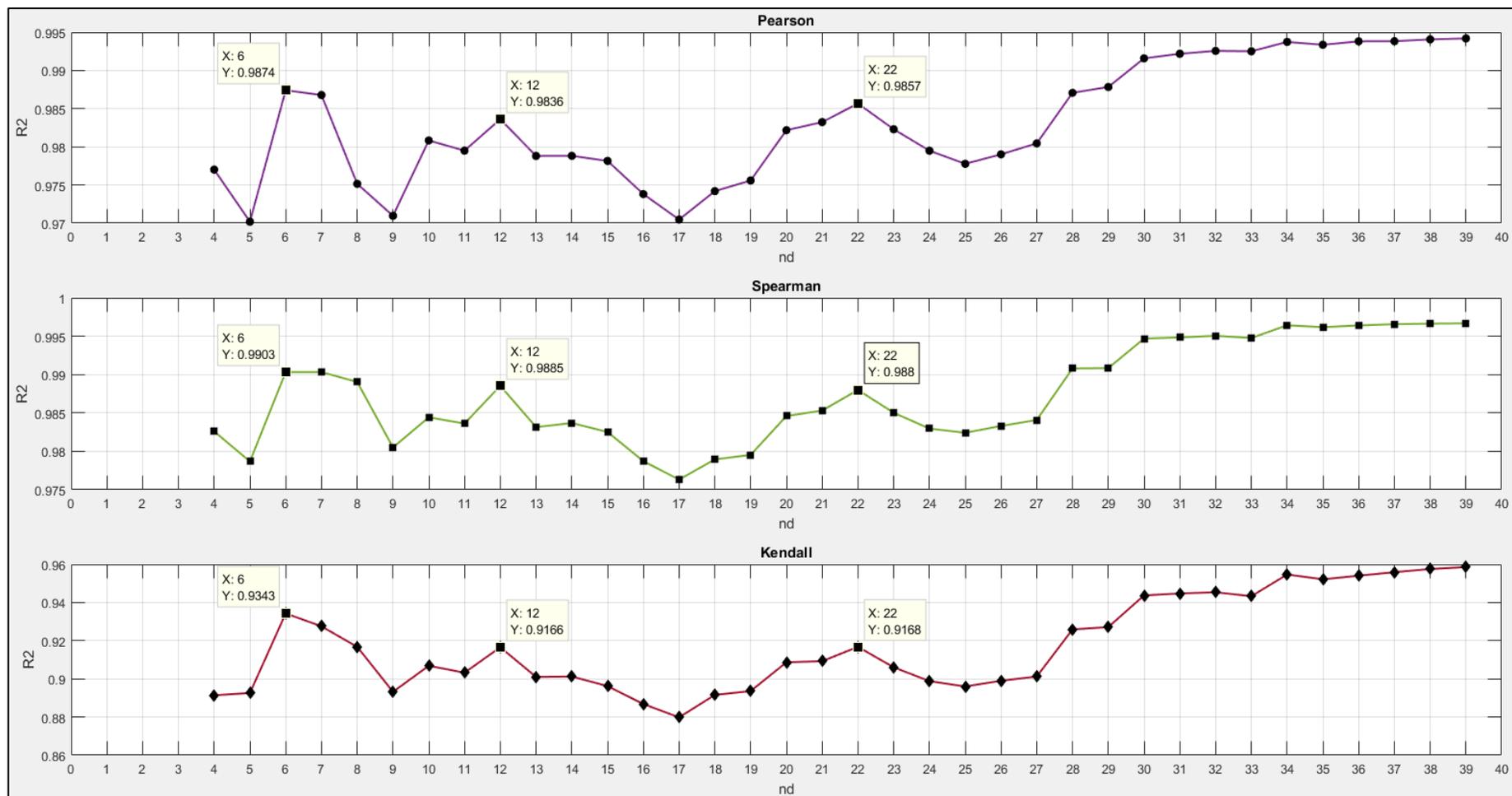


Gráfico 22. Número de datos versus coeficiente de determinación R2, Ec. GEV.

Ecuación Jhowen: Esta ecuación tiene una función definida para el cálculo de la intensidad máxima, dado tu período de retorno y duración. El valor de ξ es 1.25 según recomendación del autor, ecuación [140].

$$I_{max} = \frac{\varphi + \beta \tan \left[\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{1}{T} \right) - \frac{\pi}{2\xi} \right]}{(d + \theta)^\eta}$$

Donde:

T : Período de retorno en años.

d : duración en minutos.

$\varphi, \beta, \theta, \eta$: parámetros

Hacemos uso del programa “GraficaEcIDTJhowen”, definidas las variables dependientes y los parámetros procedemos a ajustar la Ec. Jhowen para un número de datos $n=39$ y graficamos.

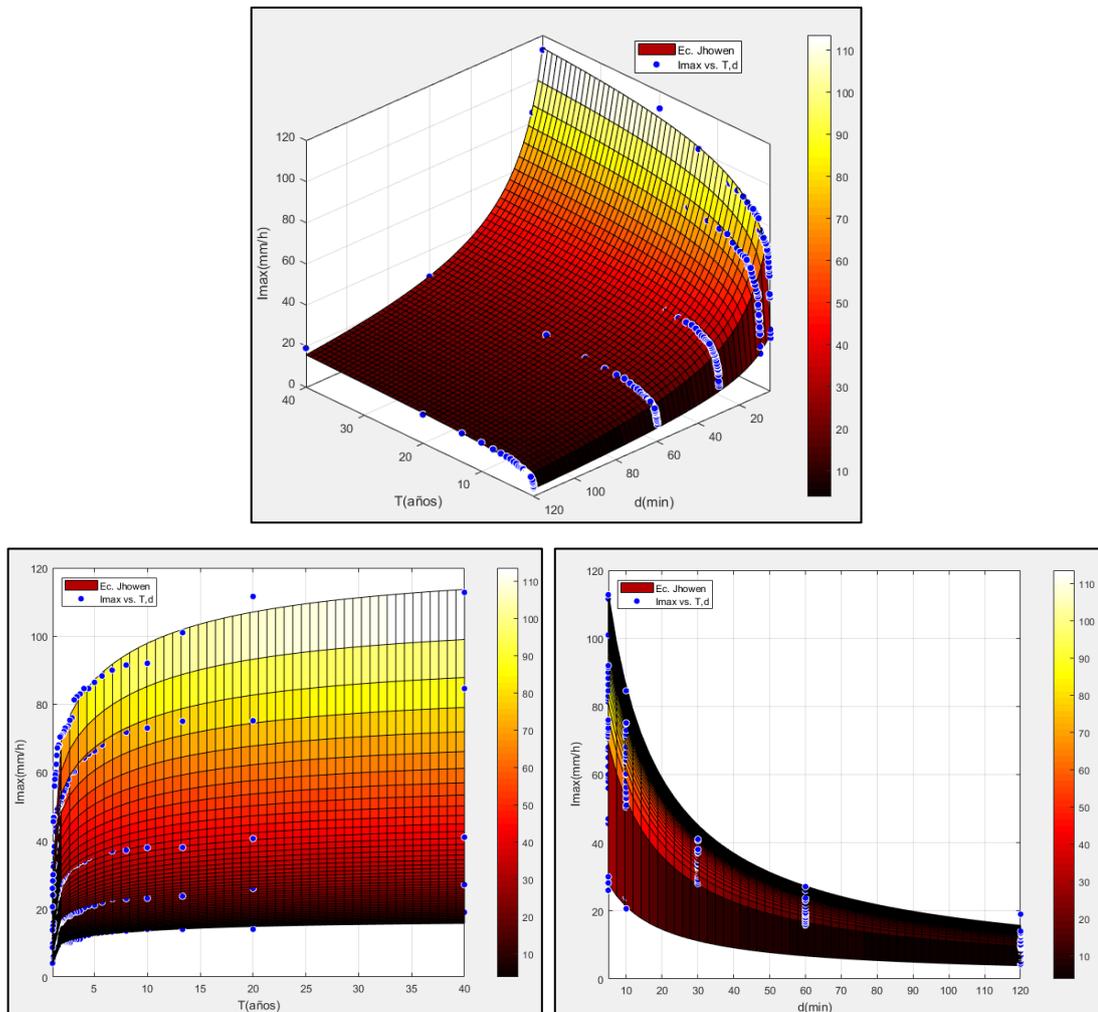


Gráfico 23. $I_{max}=f(T,d)$.

La tabla 17 muestra los valores de los parámetros de la ecuación de Jhowen y el grado de ajuste, determinado por el coeficiente de determinación Pearson (R²P), para cada sub muestra (n≤N). Los coeficientes de determinación Pearson(R²P) se encuentran por encima del 98% y existe poca variabilidad de los valores de los parámetros, teniendo como valor máximo 23% y valor mínimo 5% para el coeficiente de variación (Cv).

Tabla 17. Parámetros de la Ec. Jhowen.

n	φ	β	θ	η	R ²
5	427.43	83.76	3.52	0.77	0.9951
6	521.40	131.57	5.78	0.81	0.9844
7	1022.85	221.01	12.52	0.93	0.9858
8	1420.14	261.68	14.94	1.00	0.9863
9	1468.12	243.39	15.34	1.01	0.9877
10	945.35	187.51	11.08	0.92	0.9886
11	697.39	133.16	9.17	0.85	0.9907
12	1005.38	176.56	11.61	0.93	0.9927
13	1215.17	213.84	13.20	0.97	0.9928
14	1033.00	188.90	11.18	0.94	0.9931
15	862.75	160.91	9.62	0.91	0.9942
16	843.63	150.59	9.37	0.91	0.9937
17	750.02	132.52	8.49	0.89	0.9948
18	801.92	144.98	8.85	0.90	0.9940
19	845.95	156.76	9.35	0.90	0.9947
20	848.36	170.79	9.34	0.91	0.9954
21	867.06	176.35	9.77	0.91	0.9960
22	770.88	162.29	8.70	0.89	0.9962
23	819.01	161.23	9.17	0.90	0.9965
24	837.51	158.96	9.30	0.90	0.9972
25	976.71	181.19	10.29	0.94	0.9974
26	865.50	168.03	9.41	0.91	0.9974
27	814.26	163.24	8.91	0.90	0.9972
28	786.24	163.75	8.79	0.89	0.9976
29	744.13	153.80	8.47	0.88	0.9975
30	780.50	174.75	8.88	0.90	0.9978
31	741.31	166.66	8.47	0.89	0.9973
32	822.35	180.24	9.07	0.91	0.9974
33	833.18	187.86	9.21	0.91	0.9976
34	826.26	201.52	9.30	0.92	0.9971
35	856.21	203.26	9.59	0.92	0.9970
36	834.30	203.75	9.55	0.92	0.9973
37	841.42	203.77	9.72	0.92	0.9975
38	725.71	175.16	8.69	0.89	0.9976
39	692.64	166.27	8.42	0.88	0.9977
CV	23%	19%	22%	5%	

La tabla 18, en la columna 1 muestra el grado de ajuste según el coeficiente de determinación Pearson, de la ecuación Jhowen para cada sub muestra ($n \leq N$). En la columna 2,3,4 se muestra el grado de ajuste según Pearson(R2P), Spearman(R2S), Kedall(R2K) de la muestra total $n=N$, donde los parámetros de dicha ecuación han sido calculados a partir de sub muestras y luego se ha reproducido toda la muestra.

Tabla 18. Variación de los coeficientes de determinación según Jhowen.

n	submuestra	muestra		
	Pearson R2P	Pearson R2P	Spearman R2S	Kendall R2K
5	0.9951	0.9832	0.9880	0.9095
6	0.9844	0.9953	0.9967	0.9621
7	0.9858	0.9927	0.9958	0.9484
8	0.9863	0.9844	0.9901	0.9237
9	0.9877	0.9768	0.9854	0.9066
10	0.9886	0.9900	0.9927	0.9353
11	0.9907	0.9890	0.9921	0.9324
12	0.9927	0.9824	0.9876	0.9125
13	0.9928	0.9819	0.9875	0.9141
14	0.9931	0.9845	0.9883	0.9151
15	0.9942	0.9858	0.9888	0.9168
16	0.9937	0.9825	0.9865	0.9064
17	0.9948	0.9816	0.9857	0.9026
18	0.9940	0.9834	0.9870	0.9083
19	0.9947	0.9854	0.9886	0.9153
20	0.9954	0.9902	0.9920	0.9310
21	0.9960	0.9909	0.9926	0.9341
22	0.9962	0.9924	0.9937	0.9392
23	0.9965	0.9891	0.9911	0.9265
24	0.9972	0.9868	0.9895	0.9200
25	0.9974	0.9851	0.9883	0.9151
26	0.9974	0.9882	0.9906	0.9247
27	0.9972	0.9899	0.9916	0.9292
28	0.9976	0.9919	0.9934	0.9375
29	0.9975	0.9916	0.9931	0.9359
30	0.9978	0.9945	0.9957	0.9509
31	0.9973	0.9945	0.9956	0.9501
32	0.9974	0.9937	0.9948	0.9454
33	0.9976	0.9945	0.9956	0.9499
34	0.9971	0.9957	0.9972	0.9606
35	0.9970	0.9955	0.9969	0.9577
36	0.9973	0.9956	0.9972	0.9611
37	0.9975	0.9956	0.9971	0.9598
38	0.9976	0.9957	0.9971	0.9615
39	0.9977	0.9957	0.9971	0.9611

En el gráfico 24 se observa la intensidad máxima de lluvia estimada mediante la ecuación Jhowen versus la intensidad máxima de lluvia observada y se ha optado por calcular el coeficiente de determinación de Kendall(R2K) como grado de ajuste.

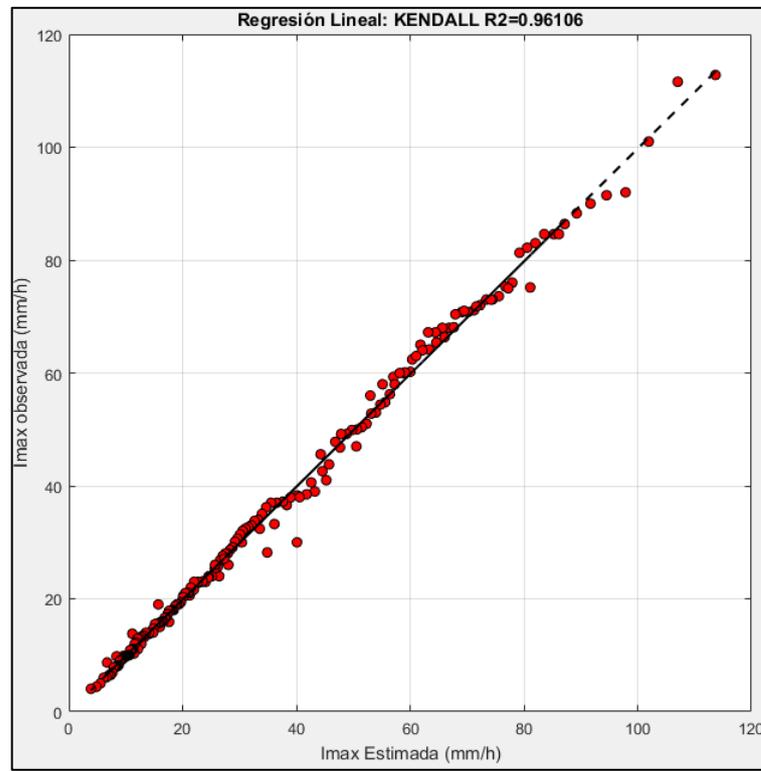


Gráfico 24. Imax estimada Vs Imax observada, Ec. Jhowen.

Encontramos que los valores de las intensidades máximas de lluvia estimadas con la ecuación de Jhowen aproximan a las intensidades máximas de lluvia observadas con un grado de ajuste del 96.11% según el coeficiente de determinación de Kendall.

En el gráfico 25 observamos la variación del coeficiente de determinación de Pearson, Spearman y Kendall según el número de datos empleados, para reproducir la muestra con $n=N$. El número de datos de la sub muestra, que obtiene un buen grado de ajuste es $n=10$, con un coeficiente de determinación aproximado a como si se hubiese empleado un $n \geq 22$, a partir de $n=30$ el coeficiente de determinación parece estabilizarse. Por consiguiente:

$$\aleph = 2(nmd)$$

$$\aleph = 2(10) = 20 \text{ años}$$

Donde:

\aleph : Número de años de registro.

Nmd: Número mínimo de datos.

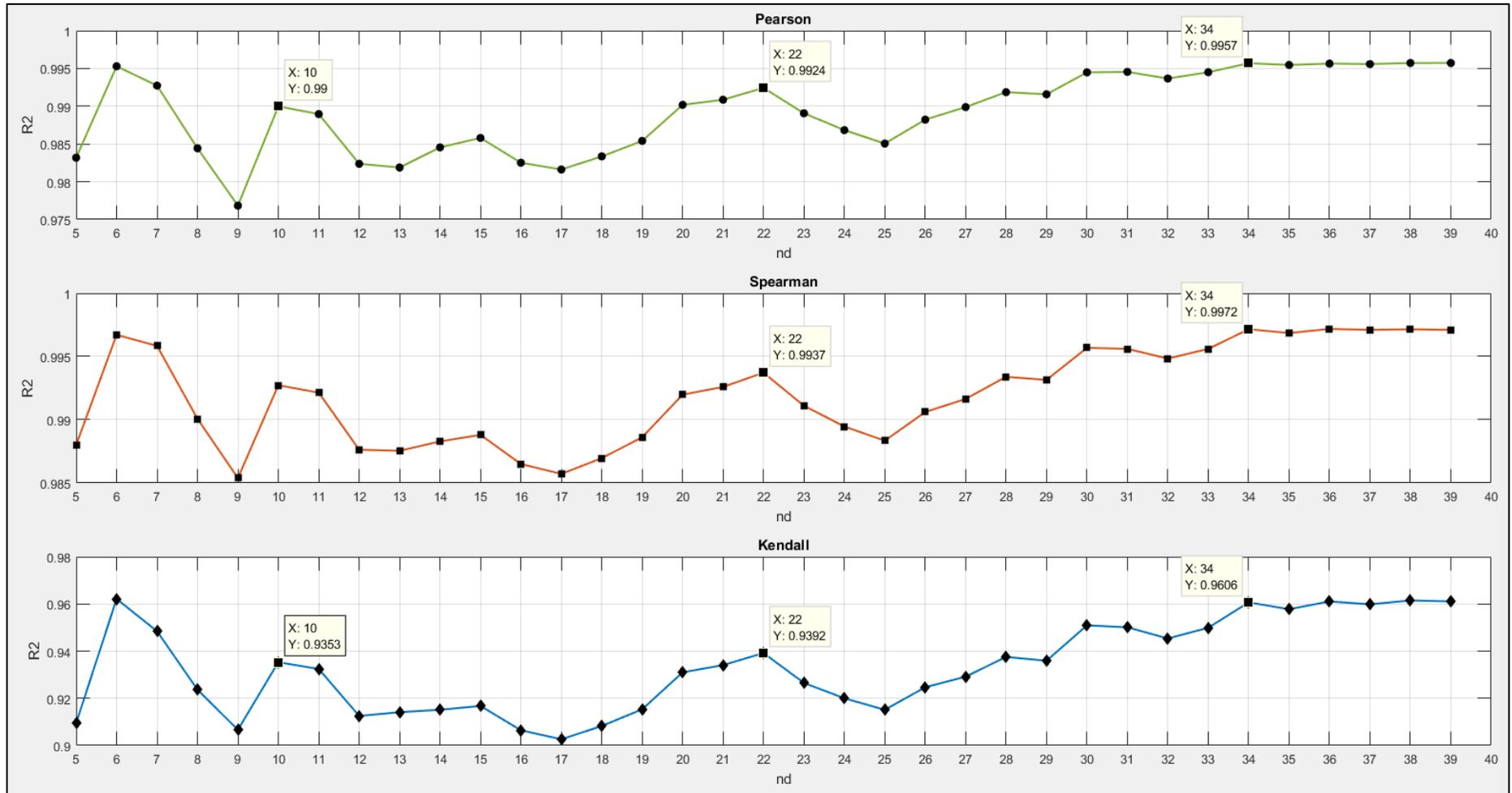


Gráfico 25. Número de datos versus coeficiente de determinación R², Ec. de Jhownen.

Métodos Matemáticos

Análisis Espectral

El análisis espectral de una variable aleatoria, consiste en utilizar la transformada discreta de Fourier para construir una gráfica en el dominio de la frecuencia para localizar la frecuencia que tiene la mayor incidencia en la muestra, la cual representa la longitud de ciclo, es decir el tiempo en el que esta variable presenta algún tipo de periodicidad. En nuestro caso la periodicidad de una variable hidrológica, representará el tiempo en el que esta variable presenta un máximo evento. Utilizamos el programa “AnálisisEspectral”, para evaluar las longitudes de ciclo de las intensidades máximas de lluvia para una duración de 5,10,30,60,120 minutos. Tomamos como intervalo de tiempo $\Delta t=1$ año. Creamos la serie de frecuencias angulares, siendo n es el número de datos y la frecuencia crítica o de Nyquist $\omega_c=\pi/\Delta t=\pi$ rad/año, valor sobre en el que se posiciona el eje de simetría del espectro de potencia.

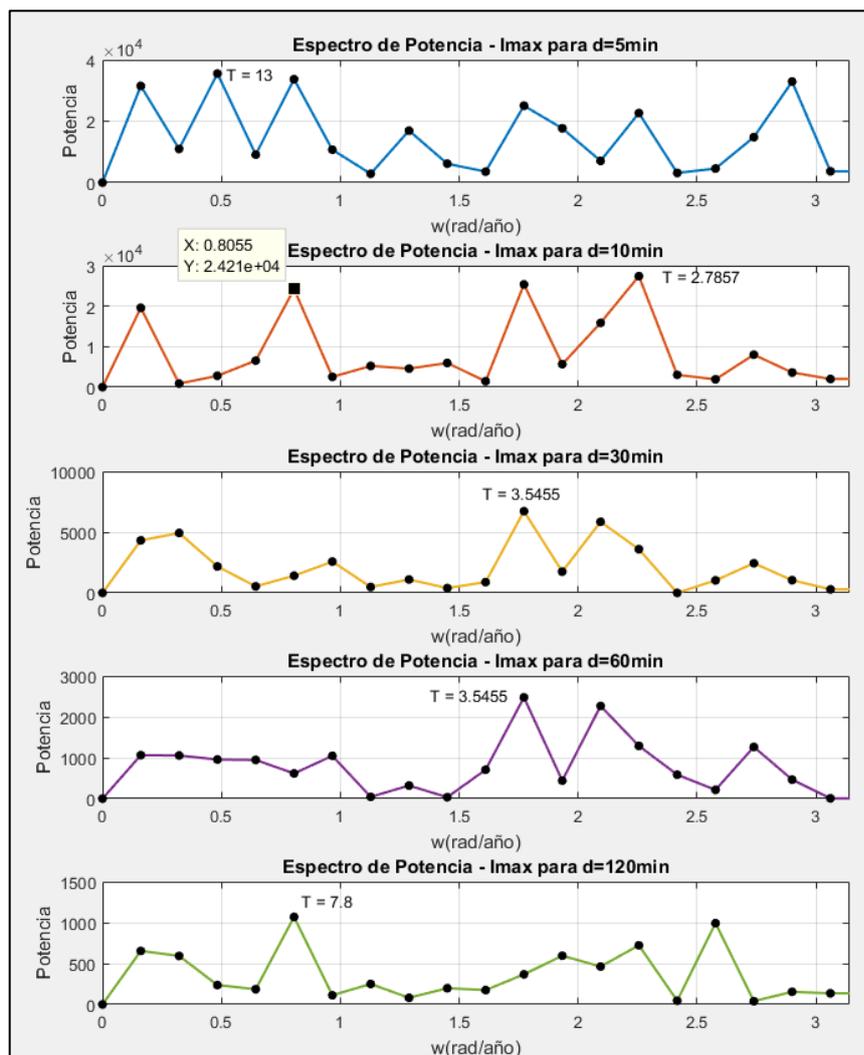


Gráfico 26. Espectros de potencia 1D.

El criterio para seleccionar la frecuencia angular de mayor incidencia en la muestra es identificar el mayor valor del espectro de potencia, luego reemplazar en $Tr=2\pi/w$ para obtener la longitud de ciclo. En el gráfico 26 observamos que el período de retorno varía de 2.79 a 13 años dependiendo de la duración de la serie, y en general los gráficos para duraciones de 5,10,30,60 presentan un similar patrón de tendencia para una frecuencia angular de 1.5 a 3 rad/año. Como estamos interesados en calcular la longitud de ciclo de un evento máximo, la solución a nuestro problema está en las intensidades máximas de lluvia para una duración de 5 minutos, a la cual corresponde un $Lc=13$ años, por consiguiente:

$$\aleph = 2(Lc)$$

$$\aleph = 2(13) = 26 \text{ años}$$

Donde:

\aleph : Número de años de registro.

Lc : Longitud de ciclo.

Ahora intentaremos ver el resultado de una transformada de Fourier en dos dimensiones, pues se sabe que las intensidades máximas de lluvia es una función del período de retorno y la duración. Hacemos uso del programa “Fourier2D” y observamos los resultados.

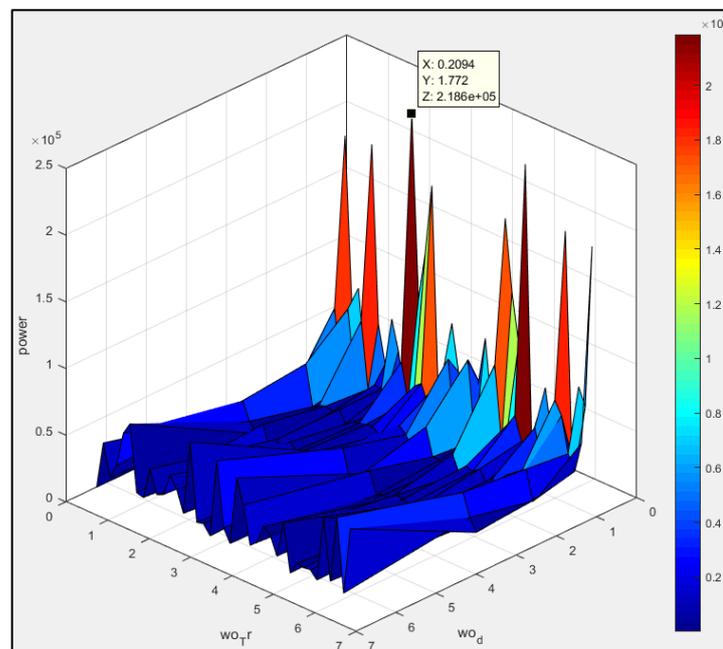


Gráfico 27. Espectros de potencia en 2D.

En el gráfico 27 podemos visualizar la frecuencia angular tanto para el período de retorno ($w_{Tr}=1.77$ rad/año) como para la duración ($w_d=0.2094$ rad/min), reemplazamos estos valores en la siguiente ecuación $L_c=2\pi/w$ y obtenemos la longitud de ciclo para el tiempo de retorno y la duración, $L_{cTr}=3.5$ años y $L_{cd}=30$ min respectivamente. Los resultados obtenidos no son satisfactorios, esto puede deberse a la falta de información meteorológica.

CAPÍTULO IV

4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En principio cabe mencionar, que las dos metodologías utilizadas para el análisis de frecuencias de las intensidades máximas de lluvia, arrojaron resultados similares. En el primer método, el número mínimo de datos de un registro histórico, según los gráficos 19, 22, 25 arrojan valores de 13, 12 y 10 años respectivamente, lo cuales se duplican a 26, 24 y 20 años, por la simple razón de que necesitamos al menos dos eventos máximos dentro en un registro histórico para realizar cualquier tipo de análisis probabilístico. Por lo tanto, el número mínimo de datos de un registro histórico, cuando no se cuenta con extensa información meteorológica es de $N = 23$ años en promedio, para predecir eventos futuros.

En el segundo método, el espectro de potencia en 1D (una dimensión) tiene una mejor aproximación del problema en cuestión, el número mínimo de datos de un registro histórico, según el gráfico 26, arroja un valor de 13 años, el cual se duplica a 26 años, según el criterio antes mencionado, el espectro de potencia en 2D (dos dimensiones), arroja resultados no satisfactorios, por ende, no se tomarán en consideración, pero que, por tratarse de un método relevante, se dejará como parte de este proyecto de investigación, una de las deficiencias para este resultado podría ser la falta de información meteorológica. Por lo tanto, el número mínimo de datos de un registro histórico es $N = 26$ años para predecir eventos futuros.

Los resultados para el número mínimo de datos de un registro histórico, no distan en demasía de las recomendaciones dadas por el Manual de Hidrología, Hidráulica y Drenaje del Ministerio de Transportes y comunicaciones ($N = 25$ años), del Manual del Silvo Agropecuario tomo X ($N = 20$ años), y del libro de “Climatología y medio ambiente”, Luis Miguel Albentosa Sánchez ($N = 30$ años), por lo que se concluye que el resultado de los métodos antes mencionados para el cálculo del número mínimo de datos de un registro histórico es satisfactorio.

La función generadora de probabilidad Pearson es una ecuación diferencial ordinaria para describir el comportamiento probabilístico de una variable aleatoria, por lo que encontrar una solución matemática es hasta cierto punto complicada, por ende, para el caso de la generalización de curvas IDT, se concluye que no es práctica y menos manejable, aunque

ofrecen una aplicación directa, sin ningún test estadístico para la evaluación de la distribución de probabilidad que sigue una variable aleatoria. Por el contrario, la función generadora de probabilidad Polinómica es una ecuación diferencial, en la que es manejable encontrar una solución matemática para las integrales, pero que también para el caso de la generalización de curvas IDT, no tiene ecuaciones explícitas para encontrar una función inversa, aunque su utilización tomará importancia, debido al buen grado de ajuste que proporcionan para la evaluación de una distribución de probabilidad que sigue una variable aleatoria. Por último, quisiera mencionar que el presente trabajo de investigación, sirvió para construir las bases fundamentales del entendimiento de las funciones generadoras de probabilidad y su relación con la solución analítica de las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión, artículo en el cual sigo trabajando con esmero y esperanza, de la misma forma en la que trabaje durante algunos años en este proyecto de investigación.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los objetivos trazados en el presente proyecto de investigación fueron alcanzados satisfactoriamente, los dos métodos utilizados y previstos por mi persona, predijeron acertadamente el número mínimo de datos de un registro histórico, cuando no se cuenta con extensa información meteorológica es de $N = 25$ años, recomendados según algunos autores y entidades.

Tomar en cuenta las condiciones de muestreo para los espectros debido al efecto de aliasing que se origina en la toma discreta de datos. La utilización de la transformada de Fourier en “n” dimensiones es un campo amplio y nuevo para el tratado de variables aleatorias, en el presente proyecto de investigación solo se trató en una y dos dimensiones. La ecuación de Jhowen alcanzó los coeficientes de determinación más altos, según Pearson (99%) y Kendall (96%), a diferencia de las otras ecuaciones IDT. Por tanto, sugiero utilizar dicha ecuación para calcular las intensidades máximas de lluvia para diferentes periodos de retorno y duración en la ciudad de Cajamarca.

Lista de símbolos

Mo^k : Momento central con respecto al origen, de orden k
 Mm^k : Momento central con respecto a la media, de orden k
 $C0, C1, C2, d$: Coeficientes de la Ecuación Diferencial Ordinaria Pearson
 $\vartheta(x)$: Función de momento
 ML^k : Momento lineal, de orden k.
 $E[x]$: Valor esperado de x.
 C_m^n : Combinaciones de n elementos en grupo de m en m.
 $g(x)$: Función real de variable real.
 $G(x)$: Función real acumulada de variable real.
 $P(x)$: Función de probabilidad empírica de excedencia.
[i]: Ecuación número i.
 μ : media.
Mo: Moda
 σ^2 : Varianza poblacional.
 σ : Desviación estándar poblacional.
 S^2 : Varianza muestral.
S: Desviación estándar muestral.
Cv: Coeficiente de variación.
Ck: Coeficiente de Curtosis.
Ca: Coeficiente de asimetría.
CLv: Coeficiente lineal de variación.
CLa: Coeficiente lineal de asimetría.
CLk: Coeficiente lineal de Curtosis.
 Δ : Estadístico de Smirnov kolmogorov.
 α : Nivel de significancia.
 $\Delta\sigma$: Valor crítico de kolmogorov.
yobs: variable observada.
ymod: variable modelada.
GEV(x): Valor Extremo Generalizada.
EVI(x): Valor Extremo tipo I.
EVII(x): Valor Extremo tipo II.
EVIII(x): Valor Extremo tipo III.
F(ω): Transformada de Fourier.
F(x)s: Integral seno de Fourier.
F(x)c: Integral coseno de Fourier.
nmd: número mínimo de datos.
Lc: Longitud de ciclo.
N: Número de años de registro.

APÉNDICE A. Programas creados en el software Matlab

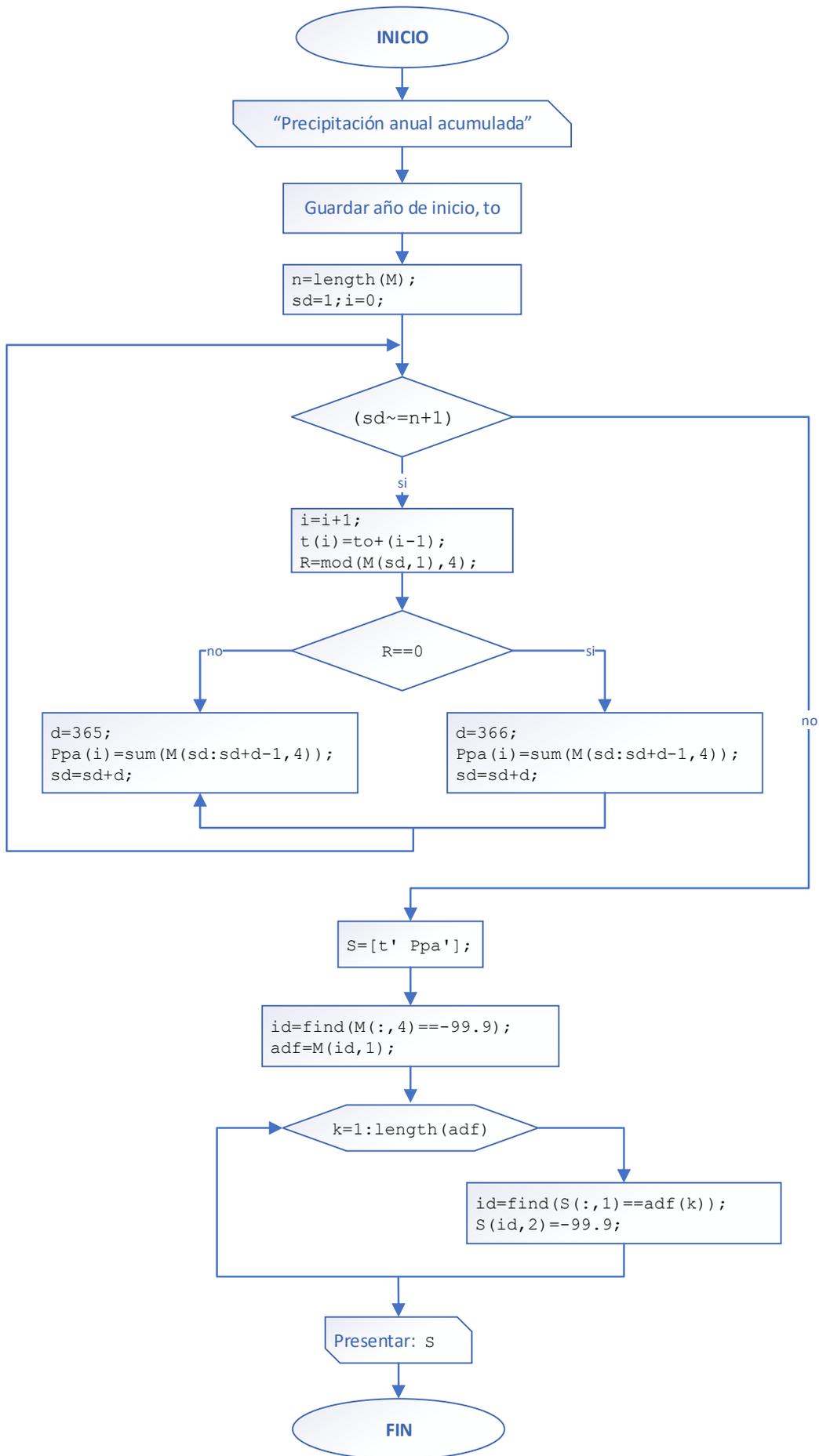
PROGRAMA 01: “Precipitación anual acumulada”

Rutina

```
function [S] = PpAcumAnual(M)

% Ingresar 12 meses completos por cada año.
to=M(1,1);
n=length(M);
sd=1;i=0;
    while (sd~=n+1)
        i=i+1;
        t(i)=to+(i-1);
        R=mod(M(sd,1),4);
        if (R==0)
            d=366;
            Ppa(i)=sum(M(sd:sd+d-1,4));
            sd=sd+d;
        else
            d=365;
            Ppa(i)=sum(M(sd:sd+d-1,4));
            sd=sd+d;
        end
    end
end
S=[t' Ppa'];
% Búsqueda y reemplazo de datos faltantes con -99.9.
id=find(M(:,4)==-99.9);
adf=M(id,1);
    for k=1:length(adf)
        id=find(S(:,1)==adf(k));
        S(id,2)=-99.9;
    end
end
```

Diagrama de flujo

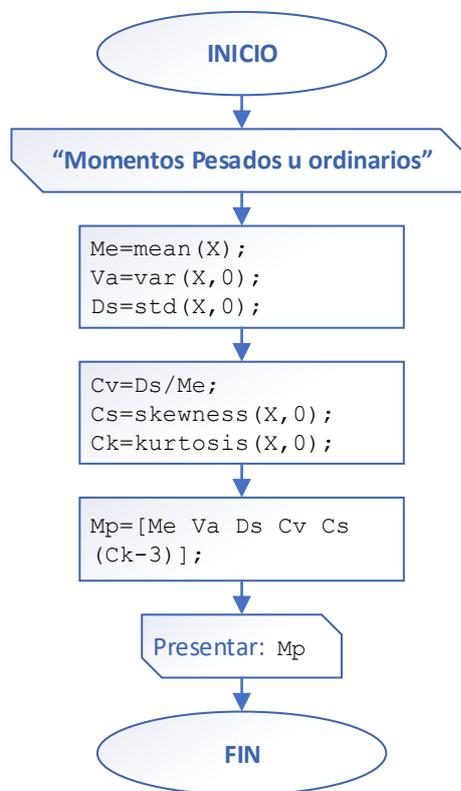


PROGRAMA 02: “Momentos Pesados u ordinarios”

Rutina

```
function [Mp] = MomentP(X)
% Momentos Pesados
Me=mean(X);
Va=var(X,0);
Ds=std(X,0);
Cv=Ds/Me;
Cs=skewness(X,0);
Ck=kurtosis(X,0);
Mp=[Me Va Ds Cv Cs (Ck-3)];
End
```

Diagrama de flujo



PROGRAMA 03: “Momentos Lineales”

Rutina

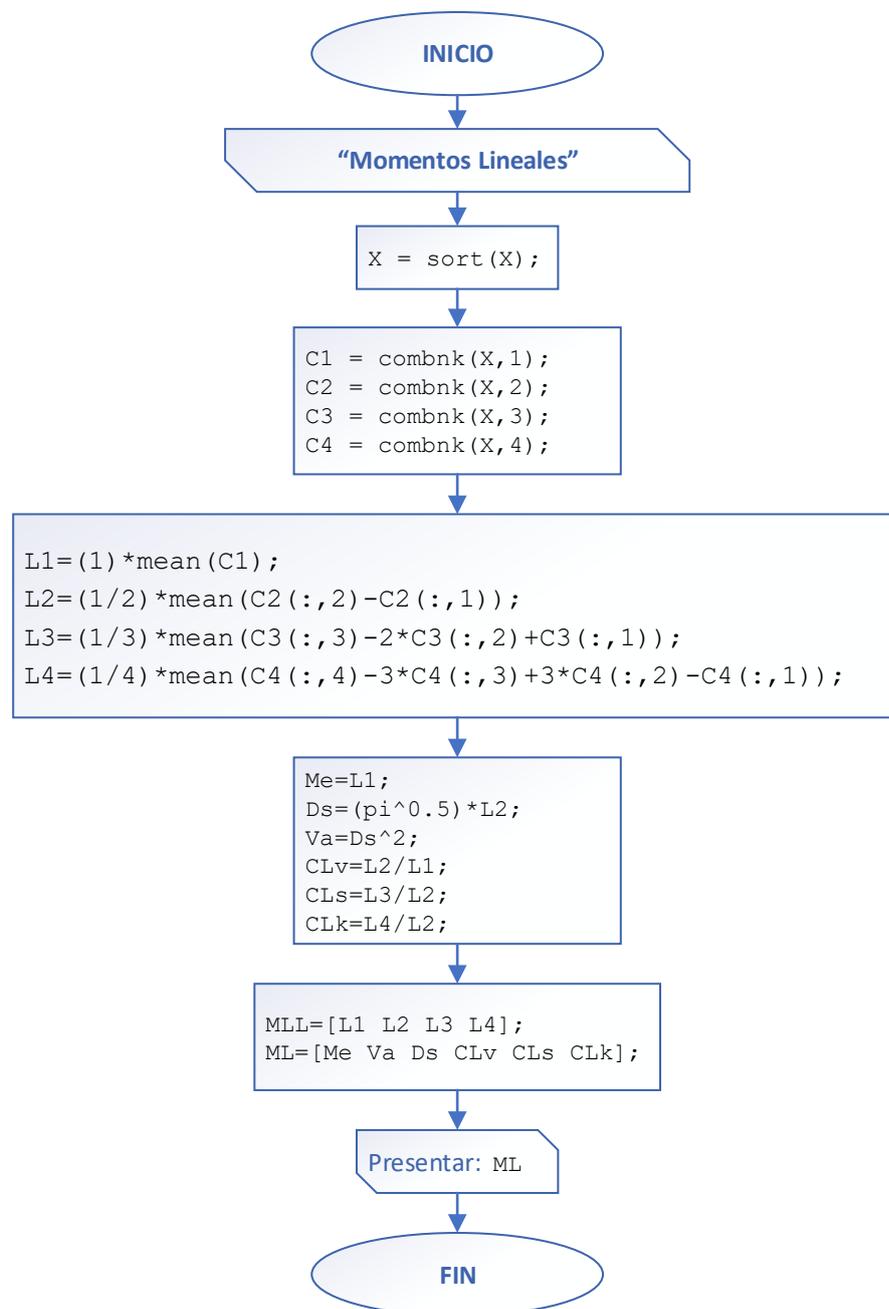
```
function [ML]=MomentL(X)
% Momentos lineales
X = sort(X);
C1 = combnk(X,1);
C2 = combnk(X,2);
C3 = combnk(X,3);
C4 = combnk(X,4);
L1=(1)*mean(C1);
```

```

L2=(1/2)*mean(C2(:,2)-C2(:,1));
L3=(1/3)*mean(C3(:,3)-2*C3(:,2)+C3(:,1));
L4=(1/4)*mean(C4(:,4)-3*C4(:,3)+3*C4(:,2)-C4(:,1));
Me=L1;
Ds=(pi^0.5)*L2;
Va=Ds^2;
CLv=L2/L1;
CLs=L3/L2;
CLk=L4/L2;
MLL=[L1 L2 L3 L4];
ML=[Me Va Ds CLv CLs CLk];
End

```

Diagrama de flujo

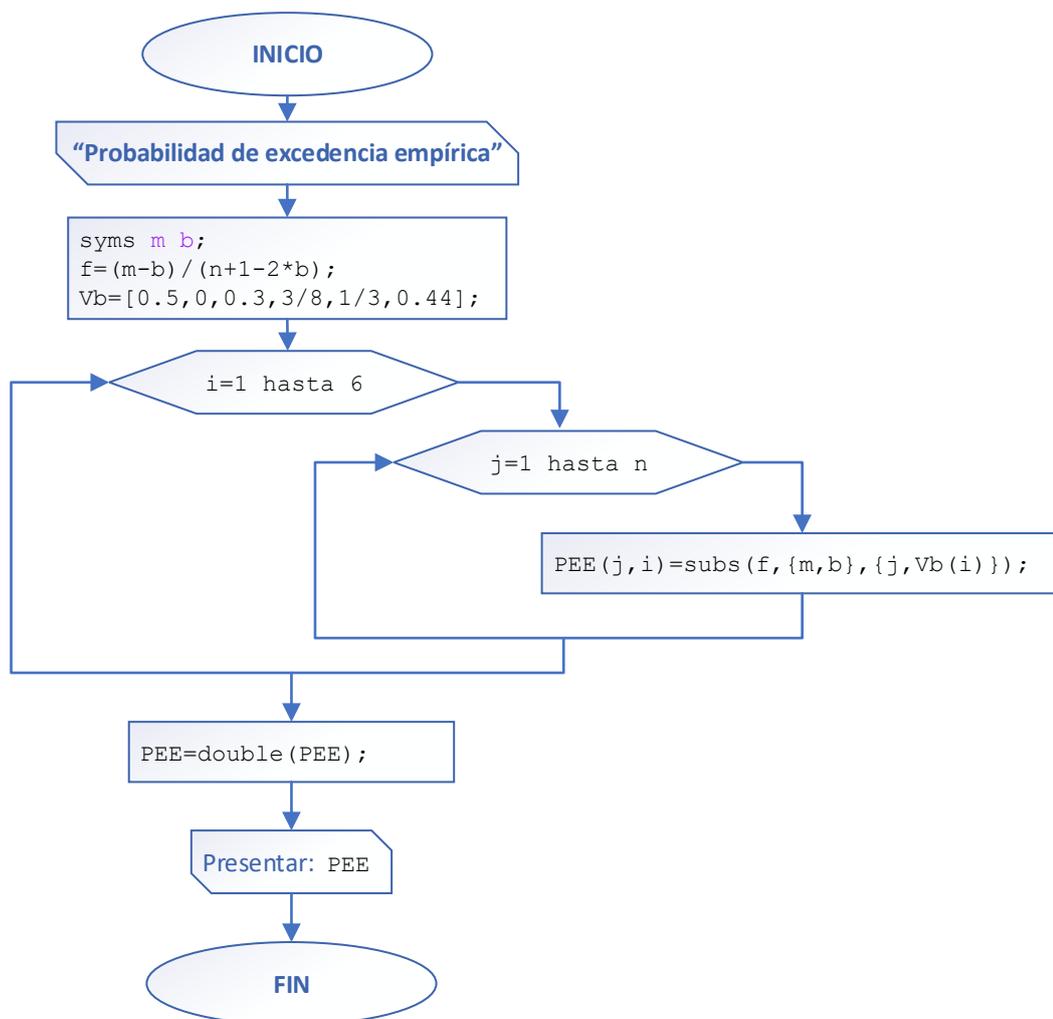


PROGRAMA 04: "Probabilidad de excedencia empírica"

Rutina

```
function [PEE]=ProbExcEmp(n)
% Probabilidad de excedencia empírica
% HAZEN, WEIBULL,CHEGODAYEV, BLOM, TUKEY, GRINGORTEN
syms m b;
f=(m-b)/(n+1-2*b);
Vb=[0.5,0,0.3,3/8,1/3,0.44];
for i=1:6
for j=1:n
PEE(j,i)=subs(f,{m,b},{j,Vb(i)});
end
end
PEE=double(PEE);
End
```

Diagrama de flujo



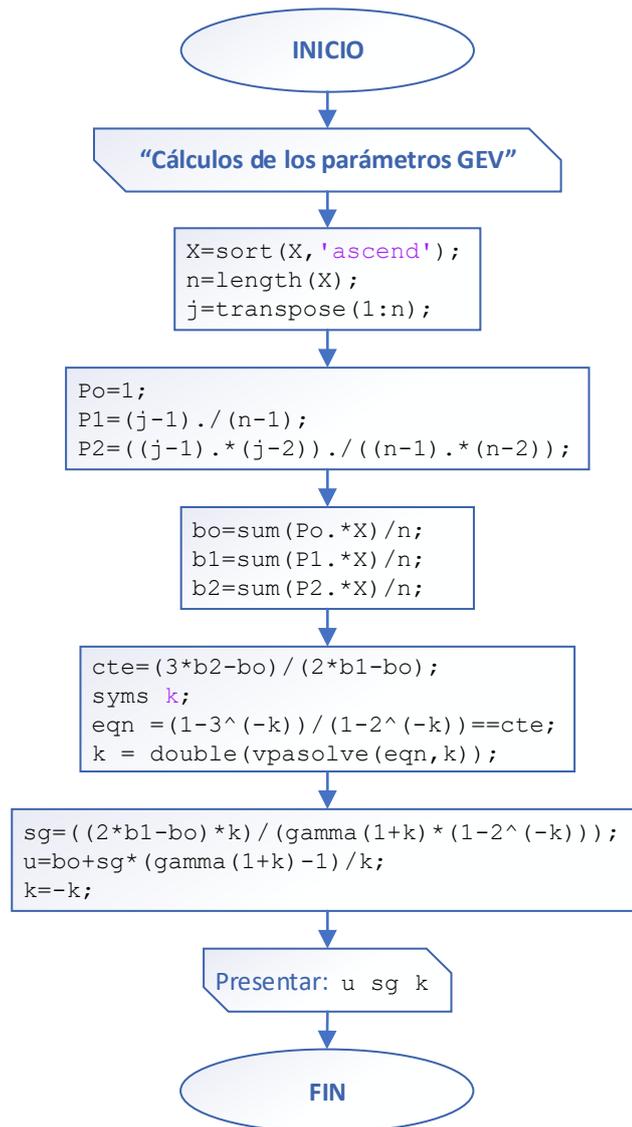
PROGRAMA 05: “Cálculos de los parámetros GEV”

Rutina

```
function [u sg k] =parametrosGEV(X)

X=sort(X, 'ascend');
n=length(X);
j=transpose(1:n);
% cálculo de P(j,n)r, posición de graficación
Po=1;
P1=(j-1) ./ (n-1);
P2=((j-1) .* (j-2)) ./ ((n-1) .* (n-2));
% Estimadores de Br
bo=sum(Po.*X)/n;
b1=sum(P1.*X)/n;
b2=sum(P2.*X)/n;
% Parámetros de GEV
% % parámetro "k"
cte=(3*b2-bo)/(2*b1-bo);
syms k;
eqn = (1-3^(-k))/(1-2^(-k))==cte;
k = double(vpasolve(eqn, k));
% % parámetro sigma "sg"
sg=((2*b1-bo)*k)/(gamma(1+k)*(1-2^(-k)));
% % parámetro mu "u"
u=bo+sg*(gamma(1+k)-1)/k;
% % parámetro "-k"
k=-k;
```

Diagrama de flujo



PROGRAMA 06: "Probabilidad de excedencia teórica"

Rutina

```

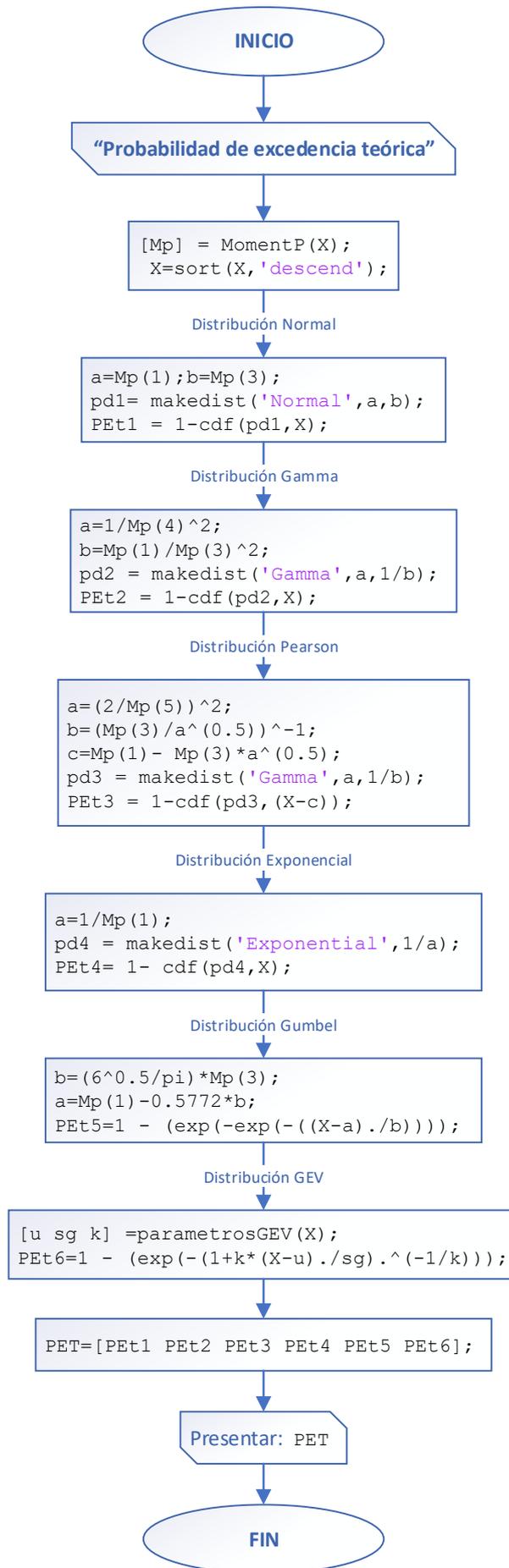
function [PET] = ProbExcTeo(X)
% Probabilidad de excedencia teórica
[Mp] = MomentP(X);
X=sort(X, 'descend');
% Función de distribución Normal
a=Mp(1);b=Mp(3);
pd1= makedist('Normal', a,b);
PEt1 = 1-cdf(pd1,X);
% Función de distribución Gamma
a=1/Mp(4)^2;
b=Mp(1)/Mp(3)^2;
pd2 = makedist('Gamma', a,1/b);
PEt2 = 1-cdf(pd2,X);
% Función de distribución Pearson
  
```

```

a=(2/Mp(5))^2;
b=(Mp(3)/a^(0.5))^-1;
c=Mp(1)-Mp(3)*a^(0.5);
pd3 = makedist('Gamma',a,1/b);
PEt3 = 1-cdf(pd3,(X-c));
% Función de distribución Exponencial
a=1/Mp(1);
pd4 = makedist('Exponential',1/a);
PEt4= 1- cdf(pd4,X);
% Función de distribución Gumbel
b=(6^0.5/pi)*Mp(3);
a=Mp(1)-0.5772*b;
PEt5=1 - (exp(-exp(-(X-a)./b)));
% Función de distribución GEV
[u sg k] =parametrosGEV(X);
PEt6=1 - (exp(-(1+k*(X-u)./sg).^(-1/k)));
% Probabilidad de Excedencia teórica
PET=[PEt1 PEt2 PEt3 PEt4 PEt5 PEt6];
end

```

Diagrama de flujo

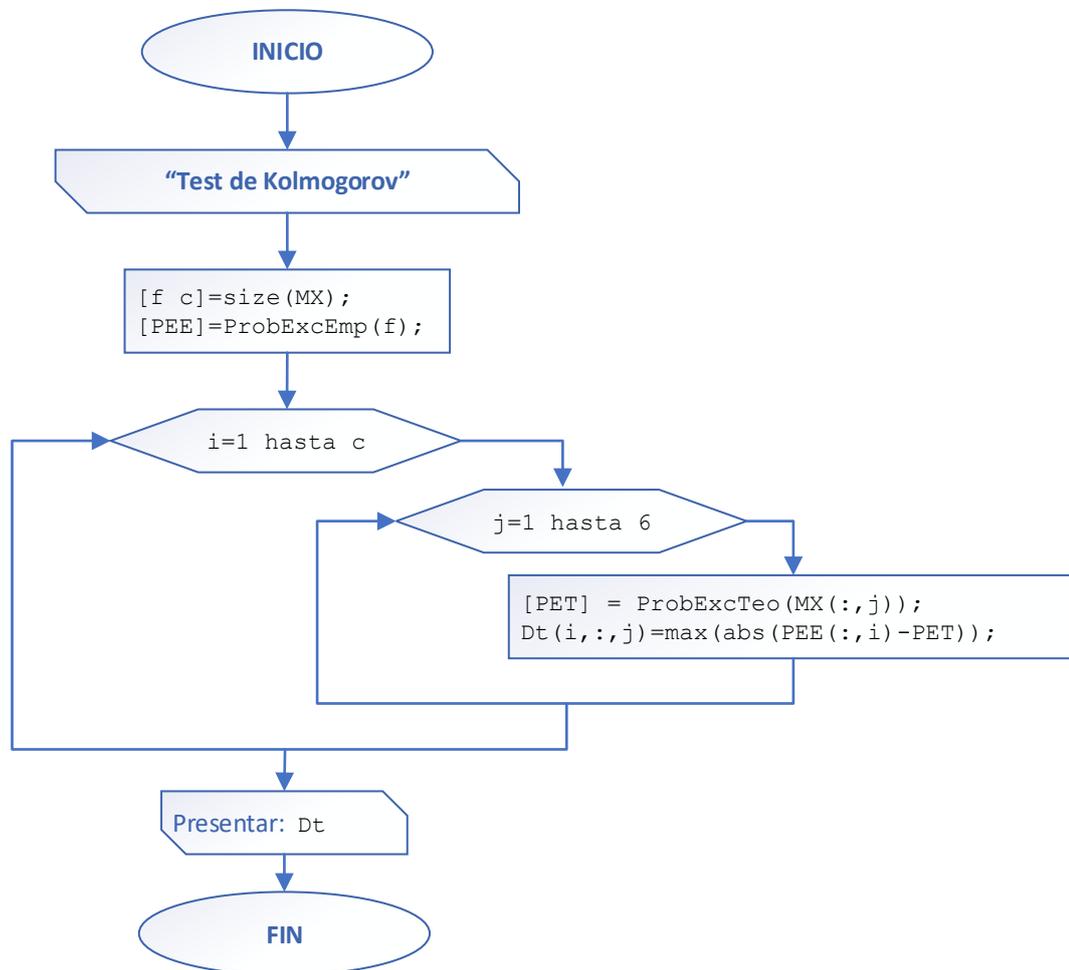


PROGRAMA 07: "Test de Kolmogorov"

Rutina

```
function [Dt] = TestKolmogorov(MX)
% j es el número de series de intensidades
% i es el número de distribuciones de probabilidad empíricas
[f c]=size(MX);
[PEE]=ProbExcEmp(f);
for j=1:c
    for i=1:6
        [PET] = ProbExcTeo(MX(:,j));
        Dt(i,:,j)=max(abs(PEE(:,i)-PET));
    end
end
end
```

Diagrama de flujo



PROGRAMA 08: “Gráficas del Test de Kolmogorov”

Rutina

```
function graficasTK(MX,idE,idT)

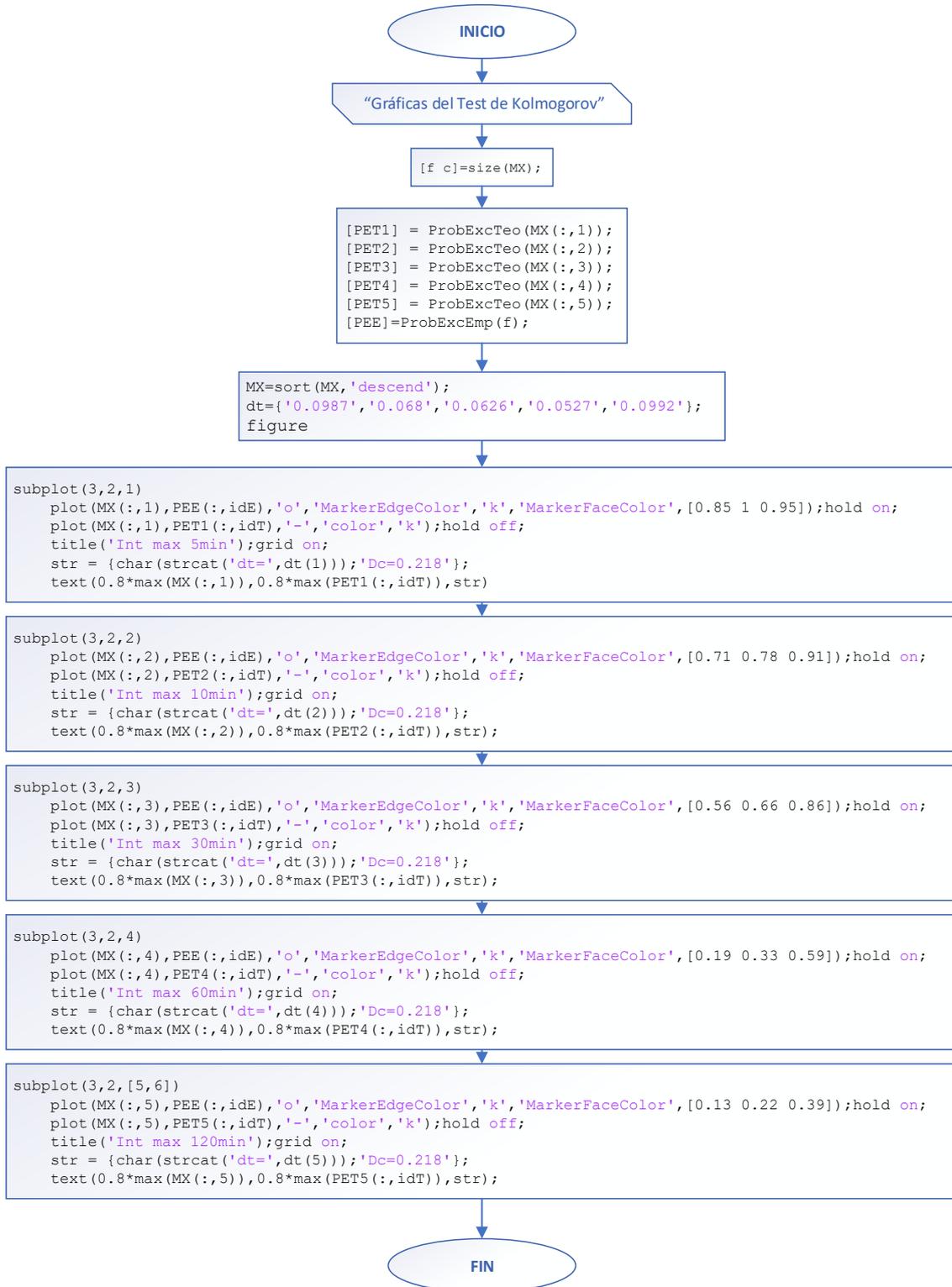
% Gráfica test de kolmogorov
% idE: número de probabilidad empírica
% idT: número de probabilidad teórica
[f c]=size(MX);
[PET1] = ProbExcTeo(MX(:,1));
[PET2] = ProbExcTeo(MX(:,2));
[PET3] = ProbExcTeo(MX(:,3));
[PET4] = ProbExcTeo(MX(:,4));
[PET5] = ProbExcTeo(MX(:,5));
[PEE]=ProbExcEmp(f);
MX=sort(MX,'descend');
dt={'0.0987','0.068','0.0626','0.0527','0.0992'}; %ingresar
delta teórico
figure
subplot(3,2,1)
plot(MX(:,1),PEE(:,idE),'o','MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor',[0.85 1 0.95]);hold on;
    plot(MX(:,1),PET1(:,idT),'-','color','k');hold off;
    title('Int max 5min');grid on;
    str = {char(strcat('dt=',dt(1))),'Dc=0.218'};
    text(0.8*max(MX(:,1)),0.8*max(PET1(:,idT)),str);
subplot(3,2,2)
plot(MX(:,2),PEE(:,idE),'o','MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor',[0.71 0.78 0.91]);hold on;
    plot(MX(:,2),PET2(:,idT),'-','color','k');hold off;
    title('Int max 10min');grid on;
    str = {char(strcat('dt=',dt(2))),'Dc=0.218'};
    text(0.8*max(MX(:,2)),0.8*max(PET2(:,idT)),str);
subplot(3,2,3)
plot(MX(:,3),PEE(:,idE),'o','MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor',[0.56 0.66 0.86]);hold on;
    plot(MX(:,3),PET3(:,idT),'-','color','k');hold off;
    title('Int max 30min');grid on;
    str = {char(strcat('dt=',dt(3))),'Dc=0.218'};
    text(0.8*max(MX(:,3)),0.8*max(PET3(:,idT)),str);
subplot(3,2,4)
plot(MX(:,4),PEE(:,idE),'o','MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor',[0.19 0.33 0.59]);hold on;
    plot(MX(:,4),PET4(:,idT),'-','color','k');hold off;
    title('Int max 60min');grid on;
    str = {char(strcat('dt=',dt(4))),'Dc=0.218'};
    text(0.8*max(MX(:,4)),0.8*max(PET4(:,idT)),str);
subplot(3,2,[5,6])
plot(MX(:,5),PEE(:,idE),'o','MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor',[0.13 0.22 0.39]);hold on;
    plot(MX(:,5),PET5(:,idT),'-','color','k');hold off;
```

```

title('Int max 120min');grid on;
str = {char(strcat('dt=',dt(5))),'Dc=0.218'};
text(0.8*max(MX(:,5)),0.8*max(PET5(:,idT)),str);
end

```

Diagrama de flujo



PROGRAMA 09: “Graficas de las funciones de densidad de probabilidad acumulada”

Código

```
function graficasFDP(MX)
[f c]=size(MX);
vc= [0 0.45 0.74;0.85 0.33 0.1;0.93 0.69 0.13;0.49 0.18 0.56;0.47 0.67
0.19];
vetiq={'Int max 5min','Int max 10min','Int max 30min','Int max
60min','Int max 120min'};
figure;
    for i=1:c
        X=MX(:,i);
        [Mp] = MomentP(X);
        VX=0.8*min(X):(max(X)-min(X))/100:max(X)*1.2;
        a=Mp(1);b=Mp(3);
        pd= makedist('Normal',a,b);
        Pt =pdf(pd,VX);
        subplot(3,2,i);
        plot(VX,Pt,'color',vc(i,:), 'LineWidth',2),grid on;
        title(vetiq(i));grid on;
        s1 = num2str(a);s1=strcat('\mu = ',s1);
        s2 = num2str(b);s2=strcat('\sigma = ',s2);
        str = {s1;s2};
        text(0.9*max(X),0.9*max(Pt),str);
    end
    pause(2);
    figure;
    for i=1:c
        X=MX(:,i);
        [Mp] = MomentP(X);
        VX=0.8*min(X):(max(X)-min(X))/100:max(X)*1.2;
        b=(6^0.5/pi)*Mp(3);
        a=Mp(1)-0.5772*b;
        Pt=(1/b).*exp(-(VX-a)./b-exp(-(VX-a)./b));
        subplot(3,2,i);
        plot(VX,Pt,'color',vc(i,:), 'LineWidth',2),grid on;
        title(vetiq(i));grid on;
        s1 = num2str(b);s1=strcat('\sigma = ',s1);
        s2 = num2str(a);s2=strcat('\mu = ',s2);
        str = {s1;s2};
        text(0.9*max(X),0.9*max(Pt),str);
    end
    pause(2);
    figure;
    for i=1:c
        X=MX(:,i);
        [Mp] = MomentP(X);
        VX=0.95*min(X):(max(X)-min(X))/100:max(X)*1.05;
        [k sg u] =parametrosGEV(X);
        Pt=(1/sg).* (1+k.*((VX-u)./sg)).^-((1/k)+1) .* exp(-(1+k.*((VX-
u)./sg)).^-1/k));
        subplot(3,2,i);
        plot(VX,Pt,'color',vc(i,:), 'LineWidth',2),grid on;
        title(vetiq(i));grid on;
        s1 = num2str(k);s1=strcat('\xi = ',s1);
        s2 = num2str(sg);s2=strcat('\sigma = ',s2);
        s3 = num2str(u);s3=strcat('\mu = ',s3);
        str = {s1,s2,s3};
        text(0.9*max(X),0.9*max(Pt),str);
    end
end
```

end

Diagrama de flujo



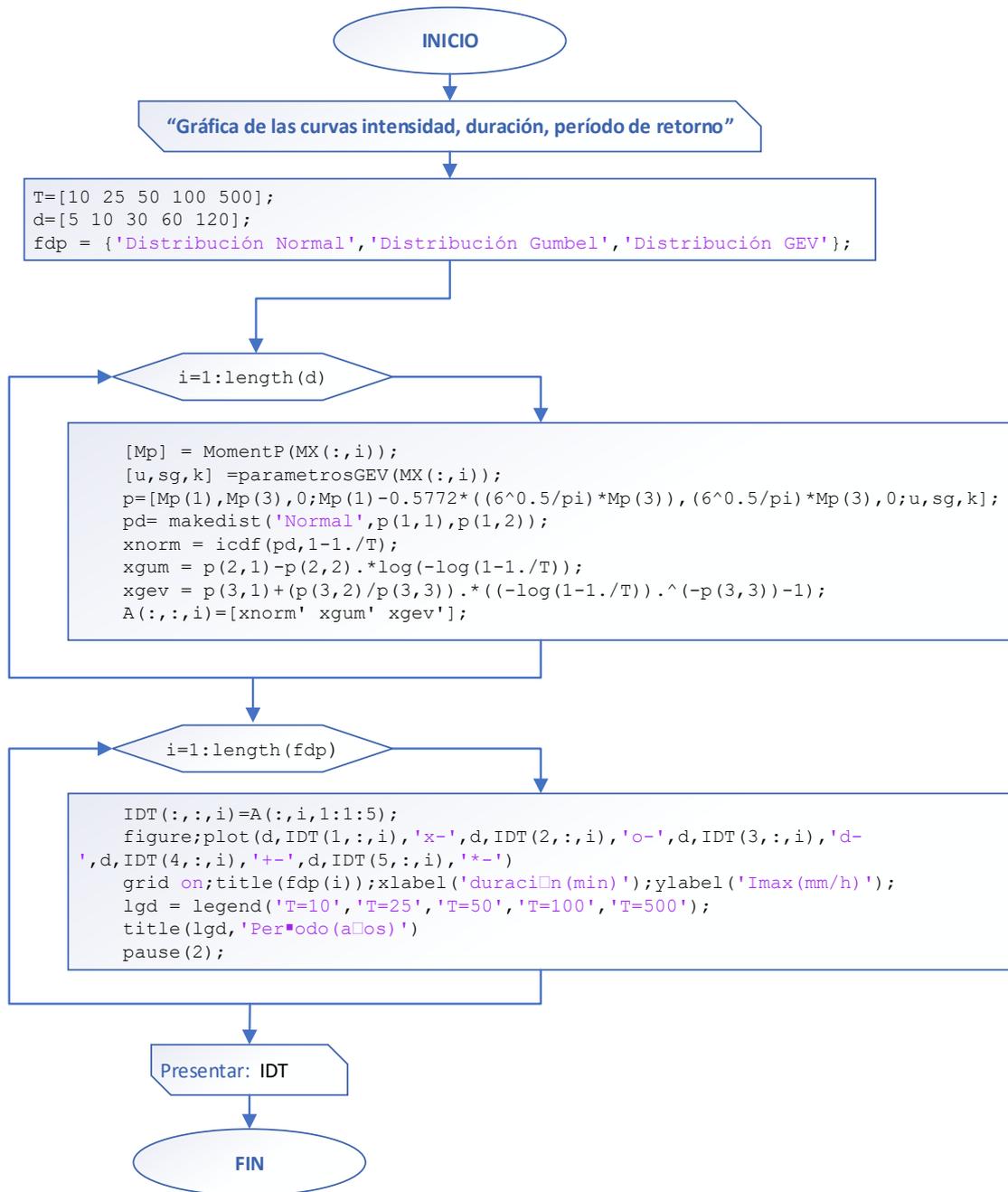
PROGRAMA 10: “Gráfica de las curvas intensidad, duración, período de retorno”

Código

```
function [IDT]=CurvasIDT(MX)

%% Tiempo de retorno, duración, función de densidad de
probabilidad
T=[10 25 50 100 500];
d=[5 10 30 60 120];
fdp = {'Distribución Normal', 'Distribución
Gumbel', 'Distribución GEV'};
%% Construcción Curvas IDF
for i=1:length(d)
    % Parámetros de la distribución Normal, Gumbel, GEV
    [Mp] = MomentP(MX(:,i));
    [u,sg,k] =parametrosGEV(MX(:,i));
    p=[Mp(1),Mp(3),0;Mp(1)-
0.5772*((6^0.5/pi)*Mp(3)),(6^0.5/pi)*Mp(3),0;u,sg,k];
    % Función de probabilidad inversa
    pd= makedist('Normal',p(1,1),p(1,2));
    xnorm = icdf(pd,1-1./T);
    xgum = p(2,1)-p(2,2).*log(-log(1-1./T));
    xgev = p(3,1)+(p(3,2)/p(3,3)).*((-log(1-1./T)).^(-
p(3,3))-1);
    A(:, :, i)=[xnorm' xgum' xgev'];
end
%% reensamble IDT(T,duración,D.Probabilidad) y gráfica de
las curvas IDT
for i=1:length(fdp)
    IDT(:, :, i)=A(:, i, 1:1:5);
    figure;plot(d, IDT(1, :, i), 'x-', d, IDT(2, :, i), 'o-
', d, IDT(3, :, i), 'd-', d, IDT(4, :, i), '+-', d, IDT(5, :, i), '*-')
    grid
on;title(fdp(i));xlabel('duración(min)');ylabel('Imax(mm/h)
');
    lgd = legend('T=10', 'T=25', 'T=50', 'T=100', 'T=500');
    title(lgd, 'Período(años)')
    pause(2);
end
end
```

Diagrama de flujo



PROGRAMA 11: “Gráfica la ecuación IDT Normal”

Código

```

function [coef,RS1,ImaxNorm,Imax,vd] =
GráficaEcIDTNorm(MXo)

[n,f]=size(MXo);
MX=sort(MXo, 'descend');
Imax=[MX(:,1);MX(:,2);MX(:,3);MX(:,4);MX(:,5)];
[PEE]=ProbExcEmp(n);
uno=ones(n,1);

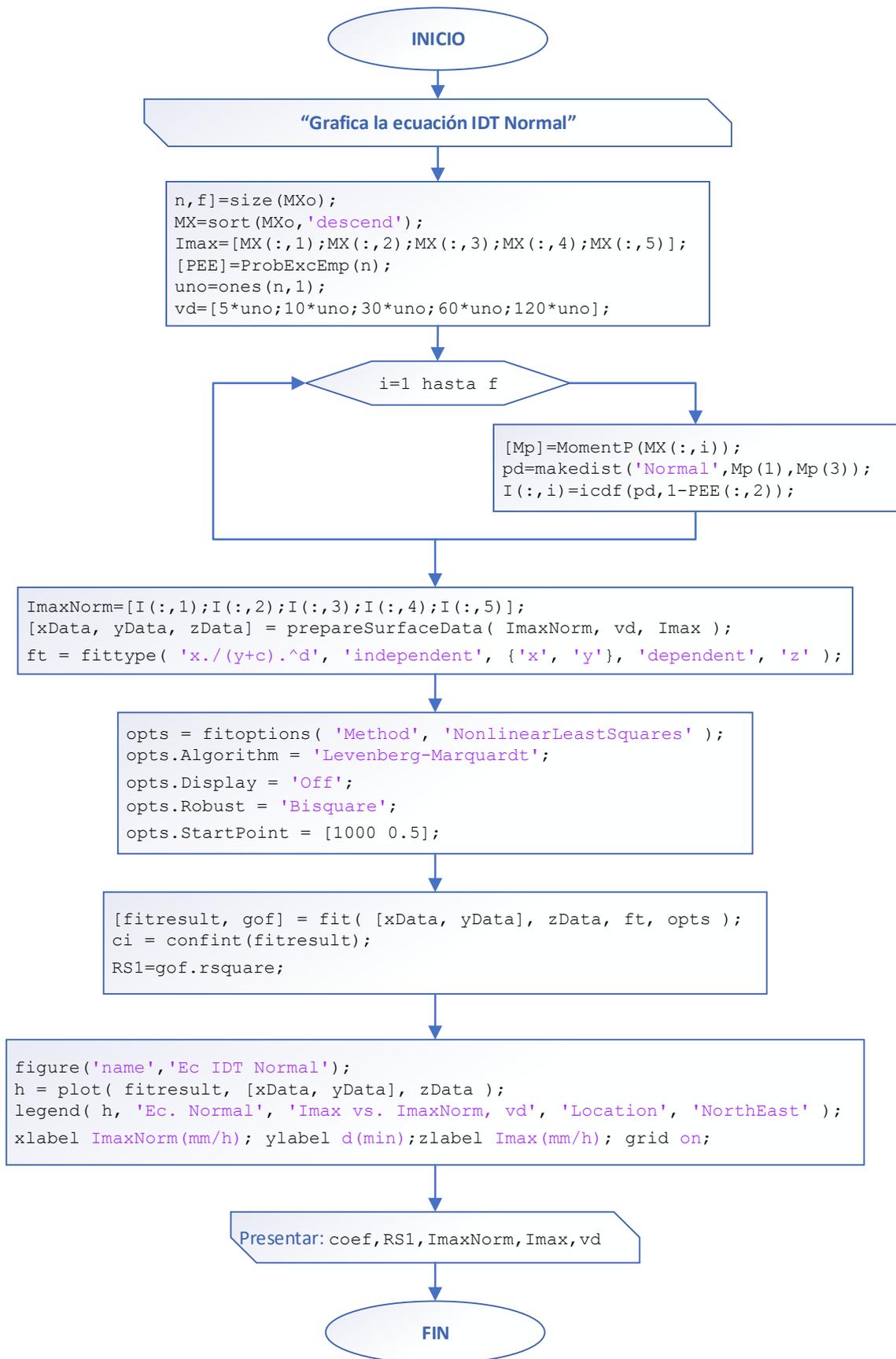
```

```

vd=[5*uno;10*uno;30*uno;60*uno;120*uno];
    for i=1:f
        [Mp]=MomentP(MX(:,i));
        pd=makedist('Normal',Mp(1),Mp(3));
        I(:,i)=icdf(pd,1-PEE(:,2));
    end
ImaxNorm=[I(:,1);I(:,2);I(:,3);I(:,4);I(:,5)];
% datos
[xData, yData, zData] = prepareSurfaceData( ImaxNorm,
vd, Imax );
% configuración y opciones de ajuste
ft = fittype( 'x./(y+c).^d', 'independent', {'x', 'y'},
'dependent', 'z' );
opts = fitoptions( 'Method', 'NonlinearLeastSquares' );
opts.Algorithm = 'Levenberg-Marquardt';
opts.Display = 'Off';
opts.Robust = 'Bisquare';
opts.StartPoint = [1000 0.5];
% Resultados del ajuste
[fitresult, gof] = fit( [xData, yData], zData, ft, opts
);
ci = confint(fitresult);
% cálculo de parámetros y coef. determinación
coef=mean(ci,1);
RS1=gof.rsquare;
% Plot fit with data.
figure('name','Ec IDT Normal');
h = plot( fitresult, [xData, yData], zData );
legend( h, 'Ec. Normal', 'Imax vs. ImaxNorm, vd',
'Location', 'NorthEast' );
% Label axes
xlabel ImaxNorm(mm/h); ylabel d(min);zlabel Imax(mm/h);
grid on;
end

```

Diagrama de flujo



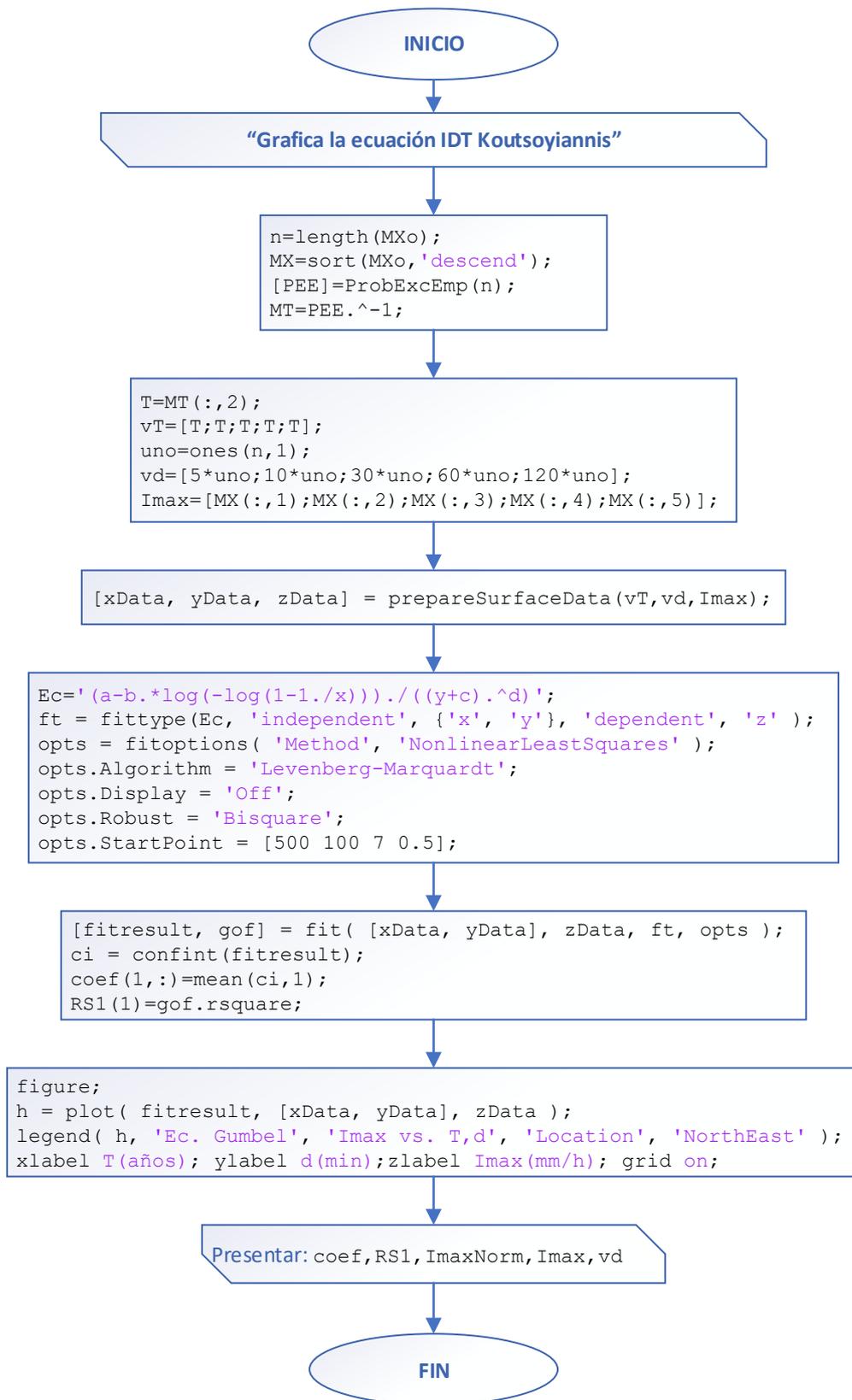
PROGRAMA 12: “Grafica la ecuación IDT Koutsoyiannis”

Código

```
function [coef,RS1,Imax,vT,vd]=GraficaEcIDTGumb(MXo)

    n=length(MXo);
    MX=sort(MXo,'descend');
    [PEE]=ProbExcEmp(n);
    MT=PEE.^-1;
    % preparación de datos
    T=MT(:,2);
    vT=[T;T;T;T;T];
    uno=ones(n,1);
    vd=[5*uno;10*uno;30*uno;60*uno;120*uno];
    Imax=[MX(:,1);MX(:,2);MX(:,3);MX(:,4);MX(:,5)];
    % datos
    [xData, yData, zData] = prepareSurfaceData(vT,vd,Imax);
    % configuración y opciones de ajuste
    Ec='(a-b.*log(-log(1-1./x)))./((y+c).^d)';
    ft = fittype(Ec, 'independent', {'x', 'y'},
'dependent', 'z' );
    opts = fitoptions( 'Method', 'NonlinearLeastSquares' );
    opts.Algorithm = 'Levenberg-Marquardt';
    opts.Display = 'Off';
    opts.Robust = 'Bisquare';
    opts.StartPoint = [500 100 7 0.5];
    % resultados del ajuste
    [fitresult, gof] = fit( [xData, yData], zData, ft, opts
);
    ci = confint(fitresult);
    % cálculo de parámetros y coef. determinación
    coef(1,:)=mean(ci,1);
    RS1(1)=gof.rsquare;
    % Plot fit with data.
    figure;
    h = plot( fitresult, [xData, yData], zData );
    legend( h, 'Ec. Gumbel', 'Imax vs. T,d', 'Location',
'NorthEast' );
    % Label axes
    xlabel T(años); ylabel d(min);zlabel Imax(mm/h); grid
on;
end
```

Diagrama de flujo



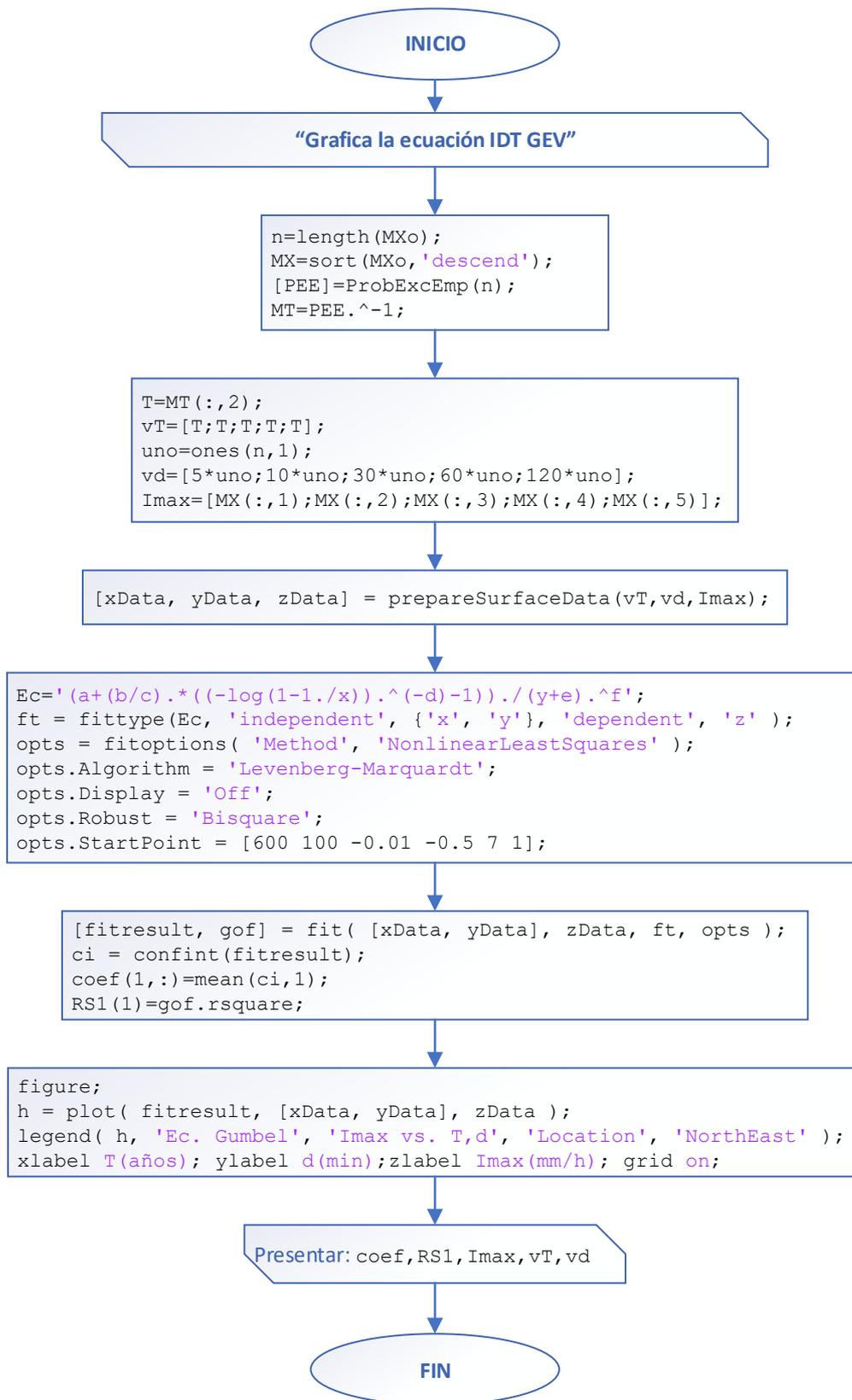
PROGRAMA 13: “Grafica la ecuación IDT GEV”

Código

```
function [coef,RS1,Imax,vT,vd]=GraficaEcIDTGEV(MXo)

    n=length(MXo);
    MX=sort(MXo,'descend');
    [PEE]=ProbExcEmp(n);
    MT=PEE.^-1;
    % preparación de datos
    T=MT(:,2);
    vT=[T;T;T;T;T];
    uno=ones(n,1);
    vd=[5*uno;10*uno;30*uno;60*uno;120*uno];
    Imax=[MX(:,1);MX(:,2);MX(:,3);MX(:,4);MX(:,5)];
    % datos
    [xData, yData, zData] = prepareSurfaceData(vT,vd,Imax);
    % configuración y opciones de ajuste
    Ec='(a+(b/c).*(-log(1-1./x)).^(-d)-1))./(y+e).^f';
    ft = fittype(Ec, 'independent', {'x', 'y'},
'dependent', 'z' );
    opts = fitoptions( 'Method', 'NonlinearLeastSquares' );
    opts.Algorithm = 'Levenberg-Marquardt';
    opts.Display = 'Off';
    opts.Robust = 'Bisquare';
    opts.StartPoint = [600 100 -0.01 -0.5 7 1];
    % resultados del ajuste
    [fitresult, gof] = fit( [xData, yData], zData, ft, opts
);
    ci = confint(fitresult);
    % cálculo de parámetros y coef. determinación
    coef(1,:)=mean(ci,1);
    RS1(1)=gof.rsquare;
    % Plot fit with data.
    figure;
    h = plot( fitresult, [xData, yData], zData );
    legend( h, 'Ec. GEV', 'Imax vs. T,d', 'Location',
'NorthEast' );
    % Label axes
    xlabel T(años); ylabel d(min);zlabel Imax(mm/h); grid
on;
end
```

Diagrama de flujo



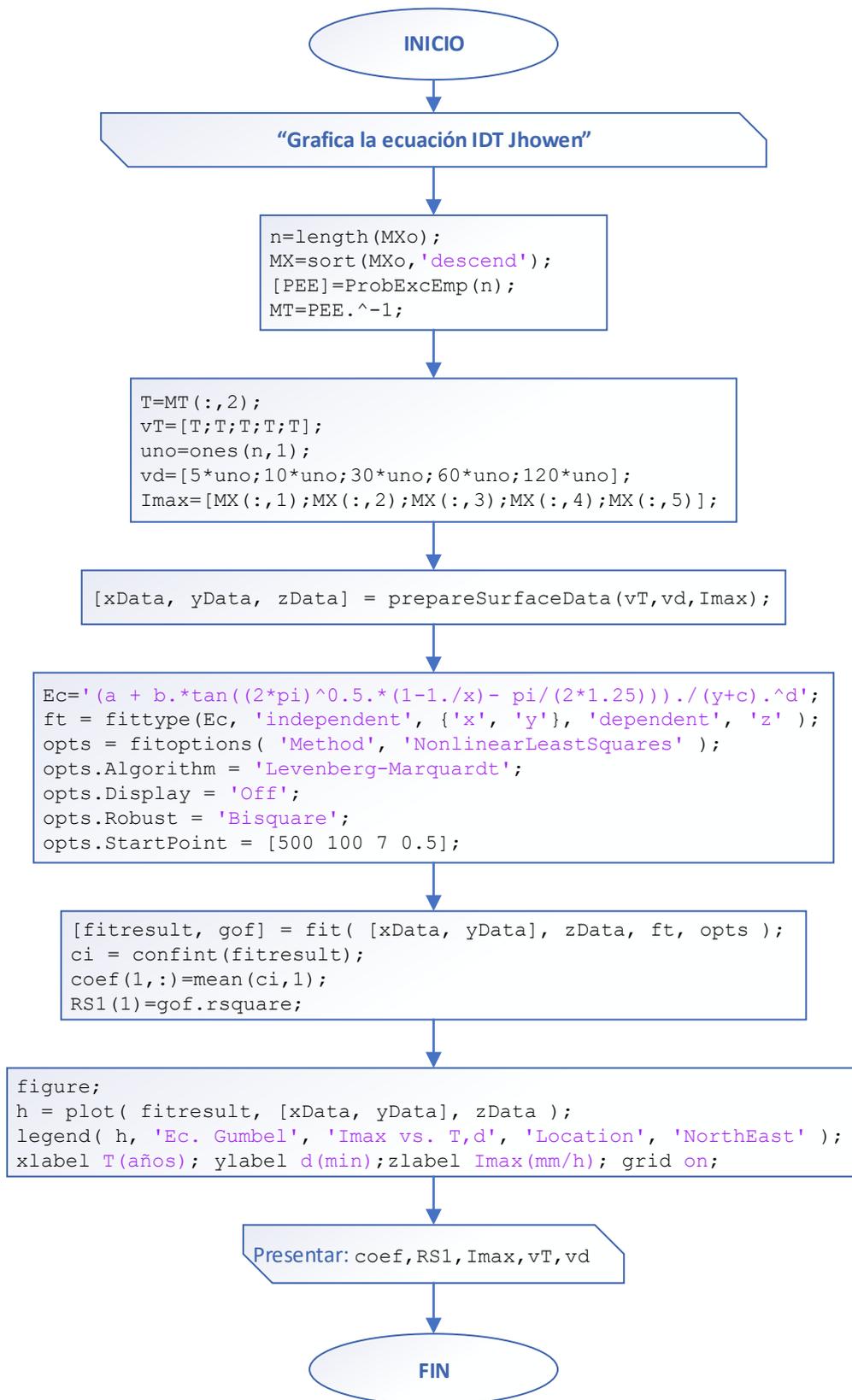
PROGRAMA 14: “Grafica la ecuación IDT Jhowen”

Código

```
function [coef,RS1,Imax,vT,vd]=GraficaEcIDTJhowen(MXo)

    n=length(MXo);
    MX=sort(MXo,'descend');
    [PEE]=ProbExcEmp(n);
    MT=PEE.^-1;
    % preparación de datos
    T=MT(:,2);
    vT=[T;T;T;T;T];
    uno=ones(n,1);
    vd=[5*uno;10*uno;30*uno;60*uno;120*uno];
    Imax=[MX(:,1);MX(:,2);MX(:,3);MX(:,4);MX(:,5)];
    % datos
    [xData, yData, zData] = prepareSurfaceData(vT,vd,Imax);
    % configuración y opciones de ajuste
    Ec='(a + b.*tan((2*pi)^0.5.*(1-1./x) -
pi/(2*1.25)))./(y+c).^d';
    ft = fittype(Ec, 'independent', {'x', 'y'},
'dependent', 'z' );
    opts = fitoptions( 'Method', 'NonlinearLeastSquares' );
    opts.Algorithm = 'Levenberg-Marquardt';
    opts.Display = 'Off';
    opts.Robust = 'Bisquare';
    opts.StartPoint = [500 100 7 0.5];
    % resultados del ajuste
    [fitresult, gof] = fit( [xData, yData], zData, ft, opts
);
    ci = confint(fitresult);
    % cálculo de parámetros y coef. determinación
    coef(1,:)=mean(ci,1);
    RS1(1)=gof.rsquare;
    % Plot fit with data.
    figure;
    h = plot( fitresult, [xData, yData], zData );
    legend( h, 'Ec. Jhowen', 'Imax vs. T,d', 'Location',
'NorthEast' );
    % Label axes
    xlabel T(años); ylabel d(min);zlabel Imax(mm/h); grid
on;colorbar;
end
```

Diagrama de flujo



PROGRAMA 15: “Ecuación IDT Normal”

```
function [RespNorm]=EcIDTNorm(MXo)
    for j=4:39
        [n,f]=size(MXo(1:j,:));
        MX=sort(MXo(1:j,:), 'descend');
        Imax=[MX(:,1);MX(:,2);MX(:,3);MX(:,4);MX(:,5)];
        [PEE]=ProbExcEmp(n);
        uno=ones(n,1);
        vd=[5*uno;10*uno;30*uno;60*uno;120*uno];
        I=[];
            for i=1:f
                [Mp]=MomentP(MX(:,i));
                pd=makedist('Normal',Mp(1),Mp(3));
                I(:,i)=icdf(pd,1-PEE(:,2));
            end
        ImaxNorm=[I(:,1);I(:,2);I(:,3);I(:,4);I(:,5)];
        % datos
        [xData, yData, zData] = prepareSurfaceData(
ImaxNorm, vd, Imax );
        % configuración y opciones de ajuste
        ft = fittype( 'x./(y+c).^d', 'independent', {'x',
'y'}, 'dependent', 'z' );
        opts = fitoptions( 'Method',
'NonlinearLeastSquares' );
        opts.Algorithm = 'Levenberg-Marquardt';
        opts.Display = 'Off';
        opts.Robust = 'Bisquare';
        opts.StartPoint = [1000 0.5];
        % resultados del ajuste
        [fitresult, gof] = fit( [xData, yData], zData,
ft, opts );
        ci = confint(fitresult);
        % cálculo de parámetros y coef. determinación
        coef(j-3,:)=mean(ci,1);
        RS1(j-3)=gof.rsquare;
    end
end
```

PROGRAMA 16: “Ecuación IDT Koutsoyiannis”

```
function [RespGumb, RespTG]=EcIDTGumbel(MXo)
n=length(MXo);
    for i=4:39
        MX=sort(MXo(1:i,:), 'descend');
        [PEE]=ProbExcEmp(i);
        MT=PEE.^-1;
        % preparación de datos
        T=MT(1:i,2);
        vT=[T;T;T;T;T];
```

```

        uno=ones(i,1);
        vd=[5*uno;10*uno;30*uno;60*uno;120*uno];
        Imax=[MX(:,1);MX(:,2);MX(:,3);MX(:,4);MX(:,5)];
        % datos
        [xData, yData, zData] =
prepareSurfaceData(vT,vd,Imax);
        % configuración y opciones de ajuste
        Ec='(a-b.*log(-log(1-1./x)))./(y+c).^d';
        ft = fittype(Ec, 'independent', {'x', 'y'},
'dependent', 'z' );
        opts = fitoptions( 'Method',
'NonlinearLeastSquares' );
        opts.Algorithm = 'Levenberg-Marquardt';
        opts.Display = 'Off';
        opts.Robust = 'Bisquare';
        opts.StartPoint = [500 100 7 0.5];
        % resultados del ajuste
        [fitresult, gof] = fit( [xData, yData], zData, ft,
opts );
        ci = confint(fitresult);
        % cálculo de parámetros y coef. determinación
        coef(i-3,:)=mean(ci,1);
        RS1(i-3)=gof.rsquare;
        time(i-3)=i
    end
    nd=4:39;
    RespGumb=[nd' coef RS1'];
MX=sort(MXo, 'descend');
[PEE]=ProbExcEmp(n);
MT=PEE.^-1;
T=MT(:,2);
vT=[T;T;T;T;T];
uno=ones(n,1);
vd=[5*uno;10*uno;30*uno;60*uno;120*uno];
Imax=[MX(:,1);MX(:,2);MX(:,3);MX(:,4);MX(:,5)];
    for i=1:length(RS1)
        Imaxcal = (coef(i,1)-coef(i,2).*log(-log(1-
1./vT)))./(vd+coef(i,3)).^coef(i,4));
        RS2P(i)=corr(Imaxcal,Imax,'Type','Pearson')^2;
        RS2S(i)=corr(Imaxcal,Imax,'Type','Spearman')^2;
        RS2K(i)=corr(Imaxcal,Imax,'Type','Kendall')^2;
    end
    % gráfica de la regresión lineal
    [r,m,b] = regression(Imaxcal,Imax,'one');
    yImax=Imaxcal*m+b;
    plot(Imaxcal,Imax,'o',Imaxcal,yImax,'-');grid on;
    xlabel('Imax Estimada (mm/h)');ylabel('Imax observada
(mm/h)');
    title(strcat('Regresión Lineal: KENDALL R2=
',num2str(RS2K(36))));
    RespTG=[nd' RS1' RS2P' RS2S' RS2K'];

```

```

% gráfica
figure('name','Ec IDT Gumbel');
subplot(3,1,1);plot(RespTG(:,1),RespTG(:,3),'o-');
grid on;title('Pearson');xlabel nd;ylabel R2;
subplot(3,1,2);plot(RespTG(:,1),RespTG(:,4),'*-');
grid on;title('Spearman');xlabel nd;ylabel R2;
subplot(3,1,3);plot(RespTG(:,1),RespTG(:,5),'d-');
grid on;title('Kendall');xlabel nd;ylabel R2;
end

```

PROGRAMA 17: “Ecuación IDT GEV”

```

function [RespGEV,RespTGEV]=EcIDTGEV(MXo)
n=length(MXo);
for i=4:39
    MX=sort(MXo(1:i,:), 'descend');
    [PEE]=ProbExcEmp(i);
    MT=PEE.^-1;
    % preparación de datos
    T=MT(1:i,2);
    vT=[T;T;T;T;T];
    uno=ones(i,1);
    vd=[5*uno;10*uno;30*uno;60*uno;120*uno];
    Imax=[MX(:,1);MX(:,2);MX(:,3);MX(:,4);MX(:,5)];
    % datos
    [xData, yData, zData] =
prepareSurfaceData(vT,vd,Imax);
    % configuración y opciones de ajuste
    Ec='(a+(b/c).*((-log(1-1./x)).^(-d)-1))./(y+e).^f';
    ft = fittype(Ec, 'independent', {'x', 'y'},
'dependent', 'z' );
    opts = fitoptions( 'Method',
'NonlinearLeastSquares' );
    opts.Algorithm = 'Levenberg-Marquardt';
    opts.Display = 'Off';
    opts.Robust = 'Bisquare';
    opts.StartPoint = [600 100 -0.01 -0.5 7 1];
    % resultados del ajuste
    [fitresult, gof] = fit( [xData, yData], zData, ft,
opts );
    ci = confint(fitresult);
    % cálculo de parámetros y coef. determinación
    coef(i-3,:)=mean(ci,1);
    RS1(i-3)=gof.rsquare;
    time(i-3)=i
end
nd=4:39;
RespGEV=[nd' coef RS1'];
MX=sort(MXo, 'descend');
[PEE]=ProbExcEmp(n);

```

```

MT=PEE.^-1;
T=MT(:,2);
vT=[T;T;T;T;T];
uno=ones(n,1);
vd=[5*uno;10*uno;30*uno;60*uno;120*uno];
Imax=[MX(:,1);MX(:,2);MX(:,3);MX(:,4);MX(:,5)];
    for i=1:length(RS1)
        Imaxcal = (coef(i,1)+(coef(i,2)/coef(i,3)).*((-
log(1-1./vT)).^(-coef(i,4))-1))./(vd+coef(i,5)).^coef(i,6)
;
        RS2P(i)=corr(Imaxcal,Imax,'Type','Pearson')^2;
        RS2S(i)=corr(Imaxcal,Imax,'Type','Spearman')^2;
        RS2K(i)=corr(Imaxcal,Imax,'Type','Kendall')^2;
    end
% gráfica de la regresión lineal
[r,m,b] = regression(Imaxcal,Imax,'one');
yImax=Imaxcal*m+b;
plot(Imaxcal,Imax,'o',Imaxcal,yImax,'-');grid on;
xlabel('Imax Estimada (mm/h)');ylabel('Imax observada
(mm/h)');
title(strcat('Regresión Lineal: KENDALL R2=
',num2str(RS2K(36))));
RespTGEV=[nd' RS1' RS2P' RS2S' RS2K'];
% gráfica
figure('name','Ec IDT GEV');
subplot(3,1,1);plot(RespTGEV(:,1),RespTGEV(:,3),'o-');
grid on;title('Pearson');xlabel nd;ylabel R2;
subplot(3,1,2);plot(RespTGEV(:,1),RespTGEV(:,4),'*-');
grid on;title('Spearman');xlabel nd;ylabel R2;
subplot(3,1,3);plot(RespTGEV(:,1),RespTGEV(:,5),'d-');
grid on;title('Kendall');xlabel nd;ylabel R2;
end

```

PROGRAMA 18: “Ecuación IDT Jhowen”

```

function [RespJhow, RespTJw]=EcIDTJhowen(MXo)
n=length(MXo);
    for i=5:39
        MX=sort(MXo(1:i,:), 'descend');
        [PEE]=ProbExcEmp(i);
        MT=PEE.^-1;
        % preparación de datos
        T=MT(1:i,2);
        vT=[T;T;T;T;T];
        uno=ones(i,1);
        vd=[5*uno;10*uno;30*uno;60*uno;120*uno];
        Imax=[MX(:,1);MX(:,2);MX(:,3);MX(:,4);MX(:,5)];
        % datos
        [xData, yData, zData] =
prepareSurfaceData(vT,vd,Imax);

```

```

        % configuración y opciones de ajuste
        Ec='(a + b.*tan((2*pi)^0.5.*(1-1./x)-
pi/(2*1.25)))/(y+c).^d';
        ft = fittype(Ec, 'independent', {'x', 'y'},
'dependent', 'z' );
        opts = fitoptions( 'Method',
'NonlinearLeastSquares' );
        opts.Algorithm = 'Levenberg-Marquardt';
        opts.Display = 'Off';
        opts.Robust = 'Bisquare';
        opts.StartPoint = [500 100 7 0.5];
        % resultados del ajuste
        [fitresult, gof] = fit( [xData, yData], zData, ft,
opts );
        ci = confint(fitresult);
        % cálculo de parámetros y coef. determinación
        coef(i-4,:) = mean(ci,1);
        RS1(i-4) = gof.rsquare;
        time(i-4) = i
    end
    nd=5:39;
    RespJhow=[nd' coef RS1'];
    MX=sort(MXo, 'descend');
    [PEE]=ProbExcEmp(n);
    MT=PEE.^-1;
    T=MT(:,2);
    vT=[T;T;T;T;T];
    uno=ones(n,1);
    vd=[5*uno;10*uno;30*uno;60*uno;120*uno];
    Imax=[MX(:,1);MX(:,2);MX(:,3);MX(:,4);MX(:,5)];
    for i=1:length(RS1)
        Imaxcal =(coef(i,1) + coef(i,2).*tan((2*pi)^0.5.*(1-
1./vT)- pi/(2*1.25)))/(vd+coef(i,3)).^coef(i,4);
        RS2P(i)=corr(Imaxcal,Imax,'Type','Pearson')^2;
        RS2S(i)=corr(Imaxcal,Imax,'Type','Spearman')^2;
        RS2K(i)=corr(Imaxcal,Imax,'Type','Kendall')^2;
    end
    % gráfica de la regresión lineal
    [r,m,b] = regression(Imaxcal,Imax,'one');
    yImax=Imaxcal*m+b;
    plot(Imaxcal,Imax,'o',Imaxcal,yImax,'-');grid on;
    xlabel('Imax Estimada (mm/h)');ylabel('Imax observada
(mm/h)');
    title(strcat('Regresión Lineal: KENDALL R2=
',num2str(RS2K(35))));
    RespTJw=[nd' RS1' RS2P' RS2S' RS2K'];
    % gráfica
    figure('name','Ec IDT Jhowen');
    subplot(3,1,1);plot(RespTJw(:,1),RespTJw(:,3),'o-');
    grid on;title('Pearson');xlabel nd;ylabel R2;
    subplot(3,1,2);plot(RespTJw(:,1),RespTJw(:,4),'*-');

```

```

grid on;title('Spearman');xlabel nd;ylabel R2;
subplot(3,1,3);plot(RespTJw(:,1),RespTJw(:,5),'d-');
grid on;title('Kendall');xlabel nd;ylabel R2;
end

```

PROGRAMA 19: “Análisis espectral”

Código

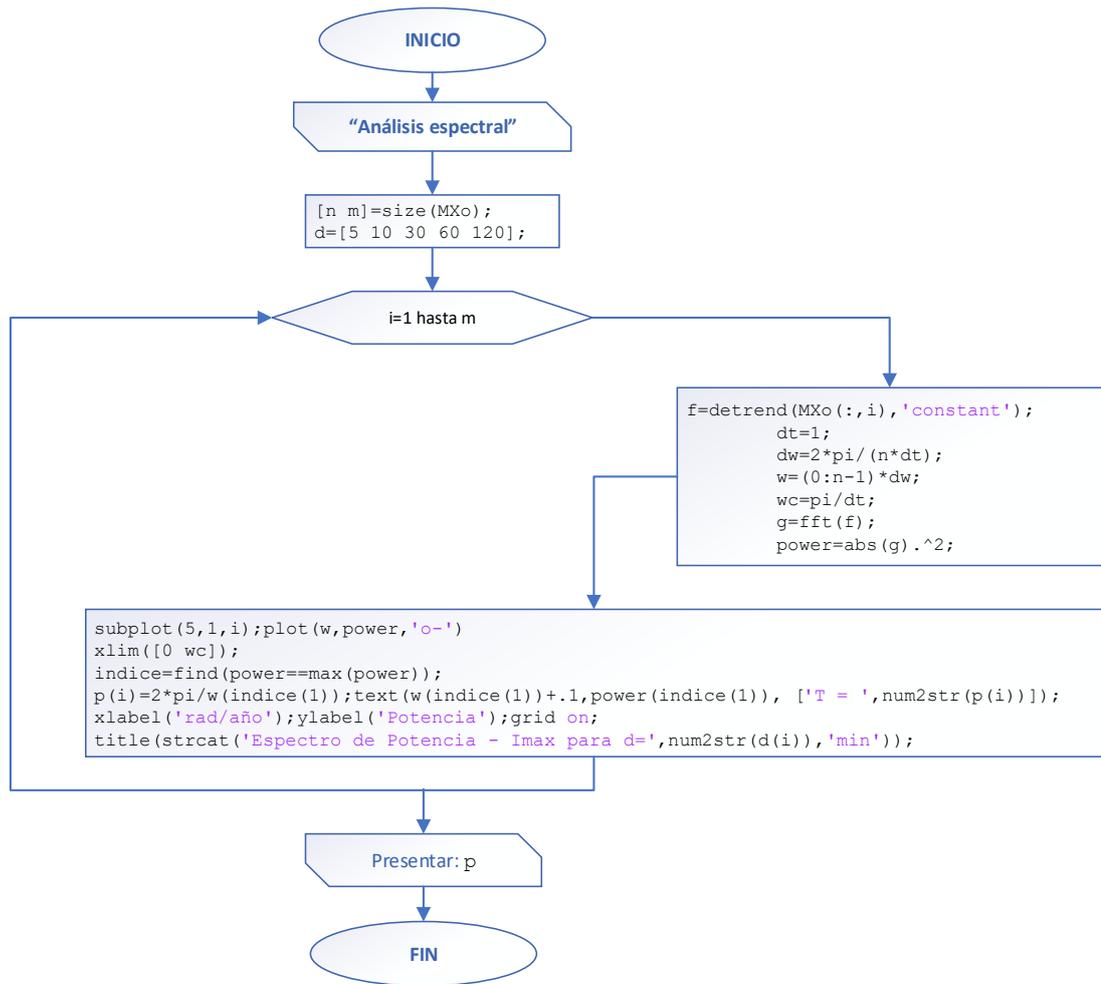
```

function [p] = AnalisisEspectral(MXo)
[n m]=size(MXo);
d=[5 10 30 60 120];
    for i=1:m
        f=detrend(MXo(:,i),'constant');
        dt=1; %año
        dw=2*pi/(n*dt);
        w=(0:n-1)*dw;
        wc=pi/dt; %frecuencia angular crítica
        g=fft(f);
        power=abs(g).^2;
        subplot(5,1,i);plot(w,power,'o-')
        xlim([0 wc]);
        indice=find(power==max(power));

        p(i)=2*pi/w(indice(1));text(w(indice(1))+.1,power(indice(1)
), ['T = ',num2str(p(i))]);
        xlabel('rad/año');ylabel('Potencia');grid on;
        title(strcat('Espectro de Potencia - Imax para
d=',num2str(d(i)), 'min'));
    end
    p=p';
end

```

Diagrama de flujo



PROGRAMA 20: “Análisis espectral en dos dimensiones”

Código

```

function [wX wY power]=TFourier2D(MXo)

%% espectro de frecuencia
[n m]=size(MXo);
f=detrend(MXo, 'constant');
g=fft2(f);
power=abs(g).^2;

%% Frecuencia X duración
dtX=1; %minutos
dwX=2*pi/(120*dtX);
wX=[4 9 29 59 119]*dwX;;
wcX=pi/dtX; %frecuencia angular crítica

%% Frecuencia Y período de retorno
dtY=1; %año
dwY=2*pi/(n*dtY);
wY=(0:n-1)*dwY;
wcY=pi/dtY; %frecuencia angular crítica

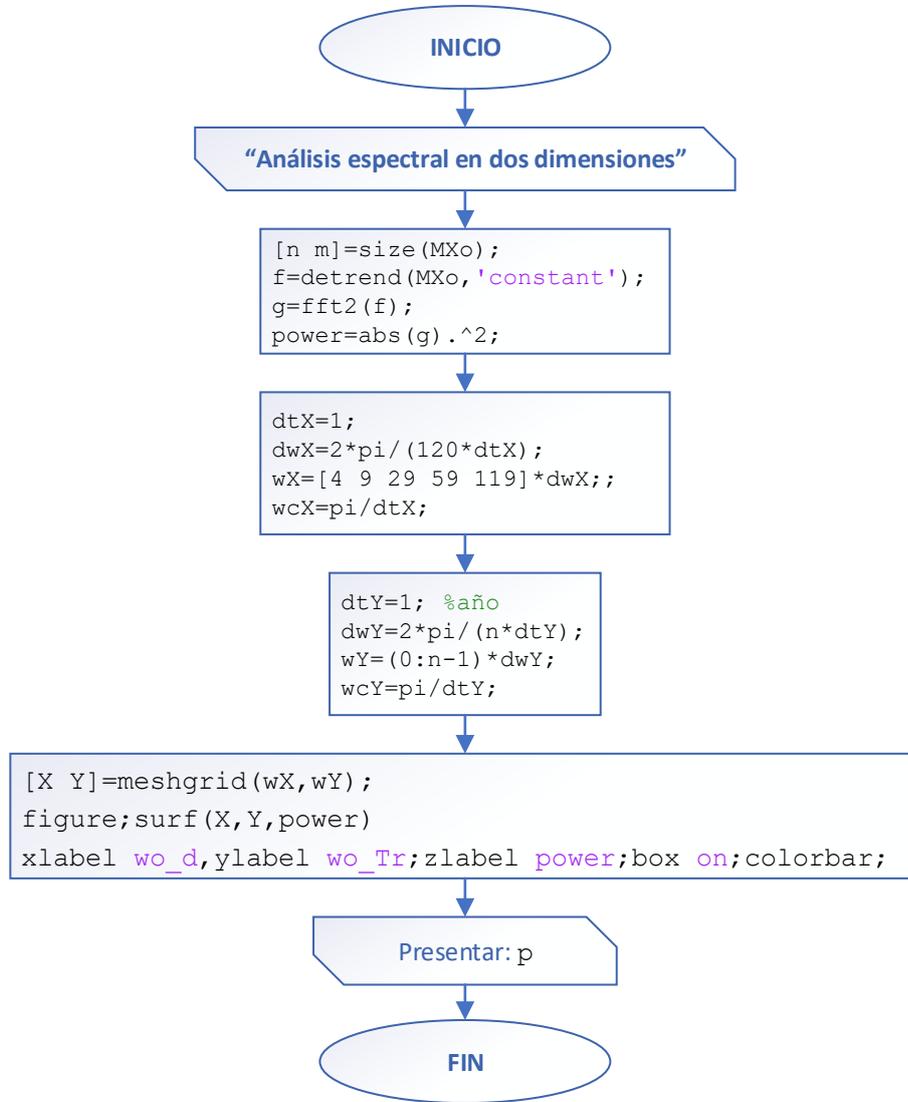
%% Frecuencia y período de retorno
[X Y]=meshgrid(wX,wY);
  
```

```

figure;surf(X,Y,power)
xlabel wo_d,ylabel wo_Tr;zlabel power;box on;colorbar;
end

```

Diagrama de flujo



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ❖ Linsley & Kholer & Paulus (1977). Hidrología para ingenieros. Editorial McGraw-Hill.
- ❖ Francisco J. Aparicio Mijares (1992). Fundamentos de la Hidrología de superficie. Editorial Limusa.
- ❖ Servicio del Silvo Agropecuario (1984). Manual del Silvo Agropecuario. Tomo X Prácticas Mecánico Estructurales fascículo H2 “Análisis de Tormentas”.
- ❖ Ven Te Chow & David R. Maidment & Larry W. Mays (1994). Hidrología Aplicada. Editorial McGraw-Hill.
- ❖ Albentosa Sánchez (1975). Climatología y Medio Ambiente. Editorial de la Universidad de Barcelona.
- ❖ Steven C. Chapra & Raymond P. Canale (2006). Métodos Numéricos para Ingenieros. Editorial McGraw-Hill.
- ❖ Manuel Córdova Zamora (2003). Estadística Descriptiva e inferencial. Editorial Librería.
- ❖ Herrerías R., Palacios y Callejón J. (1996). Distribución de la renta en la provincia de Valladolid: Dos métodos de estimación. Ponencia presentada en el “Congreso Valladolid”.
- ❖ José Callejón Céspedes (1995). Un nuevo método para generar distribuciones de probabilidad, problemas asociados y aplicaciones. Tesis presentada en la Universidad de Granada para optar por el grado de doctor.
- ❖ Enrique Castillo Ron. Estadística de Valores Extremos. Estadística Española núm. 116, 1988 pág. 5 a 34 Departamento de Matemáticas Aplicadas, Universidad de Cantabria.
- ❖ Santiago Beguería portugués (2002). Revisión de métodos paramétricos para la estimación de la probabilidad de ocurrencia de eventos extremos en Climatología e Hidrología: El uso de series de excedencias y su comparación con las series de máximos anuales. Instituto Pirenaico de Ecología (CSIC). Campus de Aula Dei. Apdo. 202. 50015-Zaragoza.
- ❖ Víctor Corchete Department of Applied Physics Higher Polytechnic School - Cite II(A). University of Almeria 04120-Almeria. Spain.
- ❖ Víctor Miguel Ponce (1989). Engineering Hydrology. Principles and Practices, Prentice Hall, primera edición. New Jersey, USA, 640 pp.

- ❖ Dennis G. Zill, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. Editorial McGraw-Hill.
- ❖ Kavvas y Delleur (1981); Waymire y Gupta (1981). *Chaos in hydrology*.
- ❖ Leithold Louis (1998). *El Cálculo*. Oxford University Press, séptima edición.
- ❖ Karl Pearson (1895). *Contributions to the Mathematical Theory of Evolution. II. Skew Variation in Homogeneous*. The Royal Society.
- ❖ Herrerías, Palacios y Callejón, (1996). Una metodología flexible para la modelización de la distribución de la renta. Ponencia presentada a la X reunión anual de la Asociación de Economía Aplicada Aspelt-España.
- ❖ George E. Box, J. Stuart Hunter, William G. Hunter, (2008). *Estadística para investigadores*. Editorial Reverté, segunda edición.
- ❖ Almudena García Pérez (2004). La Teoría del Valor Extremo. Artículo presentado como ponencia en el VII congreso Hispano Italiano de Matemáticas Financieras y Actariales organizado por la Universidad de Castilla La Mancha.
- ❖ Bath M. (1974). *Spectral Analysis in Geophysics*. Elsevier, Amsterdam.